

Physiklabor für Anfänger\*innen  
Ferienpraktikum im Sommersemester 2020

**Versuch 6:**  
**Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung**

[REDACTED]

Durchgeführt am 17.09.2020

Assistent: [REDACTED]

*✓ Abgabe Datum*

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Ziel des Versuchs</b>                                                                                                              | <b>3</b>  |
| <b>2 Versuchsaufbau</b>                                                                                                                 | <b>4</b>  |
| <b>3 Durchführung</b>                                                                                                                   | <b>5</b>  |
| <b>4 Auswertung und Fehleranalyse</b>                                                                                                   | <b>7</b>  |
| 4.1 Vermessung der Stäbe . . . . .                                                                                                      | 7         |
| 4.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls der drei Materialien und Abhängigkeit von<br>Ausrichtung und Länge auf die Durchbiegung . . . . . | 8         |
| 4.2.1 Materialabhängigkeit . . . . .                                                                                                    | 8         |
| 4.2.2 Einfluss der Ausrichtung . . . . .                                                                                                | 10        |
| 4.2.3 Einfluss des Abstands $l$ . . . . .                                                                                               | 13        |
| 4.3 Zusätzliche Kräfte auf die Stäbe . . . . .                                                                                          | 15        |
| <b>5 Zusammenfassung und Diskussion</b>                                                                                                 | <b>17</b> |
| 5.1 Materialabhängigkeit . . . . .                                                                                                      | 17        |
| 5.2 Einfluss der Ausrichtung . . . . .                                                                                                  | 17        |
| 5.3 Einfluss der Länge $l$ . . . . .                                                                                                    | 18        |
| 5.4 Reproduzierbarkeit und Hookesches Gesetz . . . . .                                                                                  | 18        |
| 5.5 Elastizitätsmoduln . . . . .                                                                                                        | 19        |
| 5.5.1 Zusammenfassung . . . . .                                                                                                         | 20        |
| <b>6 Literaturverzeichnis</b>                                                                                                           | <b>21</b> |
| <b>7 Anhang</b>                                                                                                                         | <b>22</b> |

# 1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch geht es zunächst um die Materialabhängigkeit des Elastizitätsmoduls, weshalb dieses für drei Stäbe mit jeweils rechteckigem Querschnittsprofil und aus unterschiedlichen Materialien (Messing, Aluminium, Stahl) aus der Durchbiegung bestimmt wird.

Außerdem soll der Einfluss der Ausrichtung des Querschnittsprofils und der Länge auf die Biegesteifigkeit eines Stabes untersucht werden, indem die Proportionalität der Durchbiegung zu  $\frac{1}{h^3b}$  und  $l^3$  verifiziert wird.



## 2 Versuchsaufbau

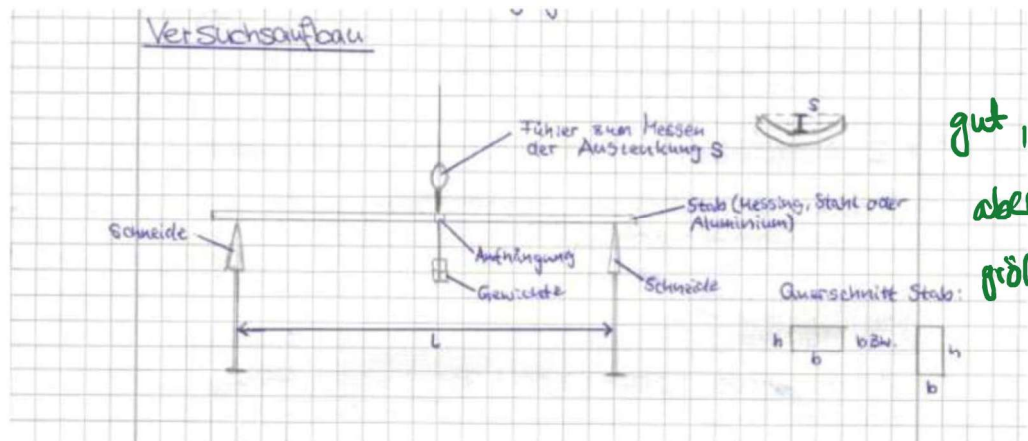


Abb. 2.1: Versuchsaufbau

Der Aufbau des Versuchs ist in Abb. 2.1 erkennbar.

Der zu untersuchende Stab mit rechteckigem Querschnittsprofil (Breite  $b$ , Höhe  $h$ ) wird auf zwei Schnellen aufgelegt, die im Abstand  $l$  zueinander stehen, welcher sich variieren lässt. In der Mitte des Stabes wird eine Aufhängung angebracht, an die Gewichte gehängt werden können, sodass der Stab sich durchbiegt. Über dem Aufhänger befindet sich ein digitales Messgerät zum Messen der Durchbiegung des Stabes, dessen Fühler auf dem Aufhänger aufliegt. Hängt man Gewichte an, bewegt sich der Fühler mit dem Stab nach unten, sodass die Durchbiegung  $s$  gemessen werden kann.



### 3 Durchführung

Zu Beginn des Versuchs werden zunächst alle verwendeten Stäbe vermessen. Mit Hilfe eines Messschiebers misst man Breite und Höhe der Stäbe jeweils fünf Mal, um statistische Unsicherheiten zu reduzieren und später einen Mittelwert bilden zu können.

Auch die Länge der Stäbe wird gemessen, um später den Fehler des Eigengewichts abschätzen zu können. Dazu misst man das Gewicht der kompletten Stäbe mit einer Waage und bricht es auf den Abstand  $l$  zwischen den Schneiden herunter.

Um weitere Fehler verursacht durch Gewichtskräfte abschätzen zu können, wird außerdem das Gewicht des Aufhängers für die Belastungsgewichte mit einer Waage bestimmt.

Anschließend werden die Belastungsgewichte zur Probe gewogen, um auch deren Fehler im weiteren Verlauf besser abschätzen zu können.

Nun kann mit den eigentlichen Messungen begonnen werden, von denen insgesamt sechs durchgeführt werden müssen. Bei jeder Messung muss zunächst das Material des Stabes, der Abstand  $l$  zwischen den Schneiden und die Ausrichtung des Stabes notiert werden.

Man beginnt eine Messung, indem man den Abstand  $l$  einstellt, wofür man die Schneiden entsprechend positioniert und festschraubt, und dann die Länge zwischen ihnen mit einem Maßband misst. Dabei ist es sehr wichtig, darauf zu achten, dass das Messgerät, welches später die Durchbiegung  $s$  misst, genau in der Mitte zwischen den Schneiden angebracht ist, um die Messung nicht zu verfälschen.

Danach wird der Gewichtsauflänger in der Mitte des Stabes festgeschraubt und der Stab auf die Schneiden gelegt. Dabei muss der Stab senkrecht auf den Schneiden liegen, damit es zu keiner weiteren Unsicherheit von  $l$  kommt. Das Messgerät zur Messung der Durchbiegung  $s$  sollte genau in der Mitte des Aufhängers aufliegen. Nun kann man das Messgerät einschalten und auf Null setzen.

Um nun die Messungen für  $s$  durchzuführen, werden Schritt für Schritt unterschiedliche Gewichte am Aufhänger angebracht (bei einer normalen Messreihe sechs Gewichte, bei einer Präzisionsmessung zehn) und die jeweils dadurch verursachte Durchbiegung  $s$  gemessen. Wichtig ist dabei, darauf zu achten, dass das Messgerät seine maximale Auslenkung nicht erreicht, was zu Verfälschungen der Messwerte führen würde, und die Durchbiegung des Stabs nie viel größer als 3mm ist, weil sonst je nach Elastizitätsmodul und Biegesteifigkeit plastische Verformung entsteht. Zur Überprüfung des Messgerätes kann das erste Gewicht nach dem Anbringen noch einmal abgenommen werden, um zu schauen, ob das Gerät für die Durchbiegung wieder 0mm anzeigt. Hängen alle nötigen Gewichte am Aufhänger, werden diese wieder Schritt für Schritt abgenommen, wobei abermals die Durchbiegung  $s$  gemessen wird.

Zunächst wird die Materialabhängigkeit des Elastizitätsmoduls überprüft, indem man drei Messreihen mit je unverändertem  $l$  und gleicher Ausrichtung für Stäbe aus Aluminium, Stahl und Messing durchführt. Beim Aluminiumstab sollte man dabei vor allem geringe Gewichte verwenden, da sich dieser Stab sehr leicht durchbiegt.

Bei der zweiten Messung wird der Einfluss der Ausrichtung des Stabs auf die Biegesteifigkeit untersucht. Dabei bleiben das Material und der Abstand  $l$  unverändert, es wird lediglich die Ausrichtung des Stabs gedreht. Als Material wird hier Stahl verwendet. Da zuvor bereits eine Messreihe für den Stahlstab in der einen Ausrichtung durchgeführt wurde, muss hier nur noch

die Durchbiegung für die andere Ausrichtung gemessen werden.

Diese Messung wird außerdem präziser mit zehn statt sechs Gewichten durchgeführt und noch einmal mit exakt derselben Reihenfolge der Gewichte wiederholt. Damit kann man sowohl die Linearität, die durch das Hookesche Gesetz zu erwarten ist, als auch die Reproduzierbarkeit einer Messreihe prüfen.

Zum Schluss wird der Einfluss des Abstands  $l$  überprüft. Dabei bleiben Material und Ausrichtung gleich, der Abstand zwischen den Schneiden wird jedoch verändert. Als Material wird dabei Messing verwendet. Auch hier wurde zuvor bei der Materialabhängigkeit bereits eine Messreihe für einen Abstand durchgeführt, sodass nur noch eine weitere mit einem anderen Abstand durchgeführt werden muss.

Aus diesen Messungen lässt sich nun für jedes Material das Elastizitätsmodul berechnen und die Abhängigkeit der Durchbiegung von Länge und Ausrichtung verifizieren.

## 4 Auswertung und Fehleranalyse

### 4.1 Vermessung der Stäbe

| Messing |         | Stahl   |         | Aluminium |         |
|---------|---------|---------|---------|-----------|---------|
| b in mm | h in mm | b in mm | h in mm | b in mm   | h in mm |
| 10,00   | 6,00    | 10,00   | 6,00    | 10,00     | 6,00    |
| 10,00   | 6,00    | 10,00   | 6,00    | 10,00     | 6,00    |
| 10,00   | 6,00    | 10,00   | 5,95    | 10,00     | 6,05    |
| 10,00   | 6,00    | 10,00   | 6,00    | 10,00     | 6,00    |
| 10,00   | 6,00    | 10,00   | 6,00    | 10,00     | 6,00    |

Alle Messwerte mit in einem Fehler:  $\pm 0,05$  mm

Tab. 4.1: Messwerte zu den Vermessungen

Aus den Messwerten aus Tabelle 4.1 ergeben sich mit den Formeln

$$\overline{b_{\text{Material}}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 b_{\text{Material},i} \quad \text{und} \quad \overline{h_{\text{Material}}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 h_{\text{Material},i} \quad (4.1)$$

folgende Mittelwerte für die Höhe und Breite der unterschiedlichen Stäbe:

$$\begin{aligned} \overline{b_{\text{Messing}}} &= 10,00\text{mm} \quad \text{und} \quad \overline{h_{\text{Messing}}} = 6,00\text{mm} & (4.2) \\ \overline{b_{\text{Stahl}}} &= 10,00\text{mm} \quad \text{und} \quad \overline{h_{\text{Stahl}}} = 5,99\text{mm} & (4.3) \\ \overline{b_{\text{Alu}}} &= 10,00\text{mm} \quad \text{und} \quad \overline{h_{\text{Alu}}} = 6,01\text{mm} & (4.4) \end{aligned}$$

Die Standardabweichung der Mittelwerte lässt sich außerdem wie folgt berechnen (mit  $x = h_{\text{Material}}$  oder  $x = b_{\text{Material}}$ ):

$$s_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4.5)$$

und somit ergibt sich für die Fehler der Mittelwerte:

$$s_{\overline{b_{\text{Messing}}}} = s_{\overline{h_{\text{Messing}}}} = s_{\overline{b_{\text{Stahl}}}} = s_{\overline{b_{\text{Alu}}}} = 0 \quad \text{und} \quad s_{\overline{h_{\text{Stahl}}}} = s_{\overline{h_{\text{Alu}}}} = 0,005\text{mm}.$$

Ihr habt aber trotzdem noch den  
0,05 mm Messfehler

## 4.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls der drei Materialien und Abhängigkeit von Ausrichtung und Länge auf die Durchbiegung

### 4.2.1 Materialabhängigkeit

|                     |       |       |       |      |       |       |      |
|---------------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|------|
| <b>Stahl</b>        |       |       |       |      |       |       |      |
| m in g              | 0     | 100   | 300   | 400  | 450   | 500   | 600  |
| s in mm aufsteigend | 0     | 0,27  | 0,86  | 1,15 | 1,30  | 1,45  | 1,73 |
| s in mm absteigend  | -0,02 | 0,27  | 0,86  | 1,15 | 1,29  | 1,44  |      |
| Mittelwert          | -0,01 | 0,27  | 0,86  | 1,15 | 1,295 | 1,445 | 1,73 |
| <b>Aluminium</b>    |       |       |       |      |       |       |      |
| m in g              | 0     | 100   | 150   | 200  | 250   | 300   | 350  |
| s in mm aufsteigend | 0     | 0,81  | 1,32  | 1,71 | 2,20  | 2,61  | 3,07 |
| s in mm absteigend  | 0,06  | 0,86  | 1,24  | 1,73 | 2,15  | 2,57  |      |
| Mittelwert          | 0,03  | 0,835 | 1,28  | 1,72 | 2,175 | 2,59  | 3,07 |
| <b>Messing</b>      |       |       |       |      |       |       |      |
| m in g              | 0     | 100   | 200   | 250  | 300   | 400   | 450  |
| s in mm aufsteigend | 0     | 0,62  | 1,26  | 1,65 | 1,97  | 2,61  | 2,94 |
| s in mm absteigend  | -0,02 | 0,62  | 1,29  | 1,63 | 1,95  | 2,62  |      |
| Mittelwert          | -0,01 | 0,62  | 1,275 | 1,64 | 1,96  | 2,615 | 2,94 |

Tab. 4.2: Messwerte zu den Messreihen für die Materialabhängigkeit

In Tabelle 4.2 ist die Masse  $m$  (mit Fehler  $\Delta m = \pm 1$  g) der angehängten Gewichte, die Durchbiegung  $s$  (mit Fehler  $\Delta s = \pm 0,01$  mm) und neben den Messwerten bereits der berechnete Mittelwert für die Durchbiegung  $s$  angegeben. Dieser berechnet sich aus der Formel

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 s_i . \quad (4.6)$$

Trägt man nun die Werte in ein Diagramm ein, ist es möglich, für jede Messreihe die Ausgleichsgerade zu bestimmen. In Abbildung 4.1 ist ein Überblick aller Messwerte in einem Diagramm dargestellt. Die Fehlerbalken sind dabei vorhanden, jedoch zu klein, um sie zu erkennen. Der Fehler der mittleren Durchbiegung berechnet sich mit der Formel

$$s_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^2 (s_i - \bar{s})^2} . \quad (4.7)$$

Die Ausgleichsgeraden wurden von Hand graphisch bestimmt. Die zugehörigen Diagramme sind in Anhang 4 bis 6 zu finden. Bei diesen Diagrammen wurden ebenfalls die Fehlerbalken aufgetragen, jedoch sind sie auch hier, außer beim Diagramm für Aluminium, nicht zu erkennen.



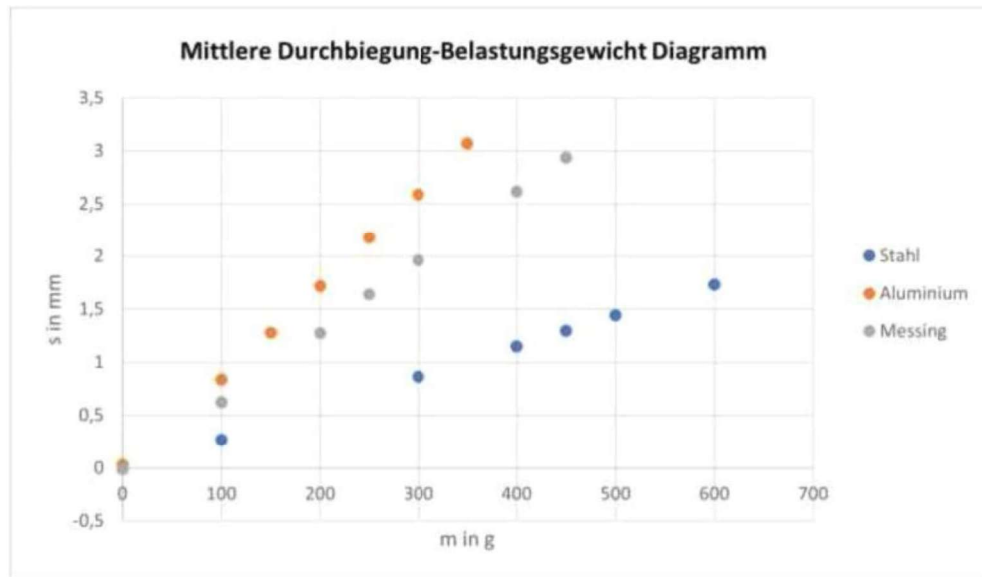


Abb. 4.1: Mittlere Durchbiegung-Belastungsgewicht-Diagramm für verschiedene Materialien

Aus den Diagrammen im Anhang ergeben sich folgende Steigungen für die Ausgleichsgeraden:

Für Aluminium:

$$\beta_{\text{Aluminium}} = \frac{2,65 \text{ mm}}{297,6 \text{ g}} \approx 0,008905 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad (4.8)$$

Für Messing:

$$\beta_{\text{Messing}} = \frac{2,53 \text{ mm}}{384,0 \text{ g}} \approx 0,006589 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad (4.9)$$

*schöner wäre 0,00004 mm/g der andere Einheit wählen*

Für Stahl:

$$\beta_{\text{Stahl}} = \frac{1,56 \text{ mm}}{531,3 \text{ g}} \approx 0,002936 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad (4.10)$$

Die Unsicherheit der Steigungen der Ausgleichsgeraden schätzen wir aus der Unsicherheit, die mit der linearen Regression, siehe Seite 11, berechnet wurde, ab. ✓

Mit Hilfe der gemessenen Größen kann nun das Elastizitätsmodul  $E$  der drei Materialien berechnet werden. Dafür wird die Formel des Biegungspfeils aus der Versuchsanleitung benutzt:

$$s = \frac{l^3 F}{E \cdot 4h^3 b} = \frac{l^3 mg}{E \cdot 4h^3 b}, \quad (4.11)$$

wobei  $F = m \cdot g$  die Gewichtskraft der angehängten Gewichte ist. Stellt man diese Formel um, ergibt sich mit  $\beta = \frac{s}{m}$  für das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{l^3 mg}{4h^3 bs} = \frac{l^3 g}{4h^3 b \beta} \quad (4.12)$$

Aus unserer Messung kennen wir die Größe  $l$ , die Messunsicherheit wird dabei auf Grund des etwas ungenauen Maßbandes auf  $\Delta l = 1 \text{ mm}$  geschätzt, es ist also  $l = (798 \pm 1) \text{ mm}$ . Außerdem kennen wir die Mittelwerte  $\bar{h}$  und  $\bar{b}$  für die drei Stäbe. Für die Erdbeschleunigung  $g$  verwenden

wir  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  (Quelle 1).

Mit Formel (4.12) lassen sich also die Elastizitätsmoduln berechnen:  
Für Aluminium:

$$E_{\text{Alu}} \approx (64,8 \pm 0,3) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (4.13)$$

Für Messing:

$$E_{\text{Messing}} \approx (87,4 \pm 0,3) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (4.14)$$

Für Stahl:

$$E_{\text{Stahl}} \approx (200,0 \pm 0,9) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (4.15)$$

Die Unsicherheit der Elastizitätsmoduln wurde dabei mit einem Spezialfall der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$s_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{3\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \beta}{\beta}\right)^2} \quad (4.16)$$

#### 4.2.2 Einfluss der Ausrichtung

Als nächstes wird der Einfluss der Ausrichtung untersucht. Es gilt, die Proportionalität der Durchbiegung  $s$  zu  $\frac{1}{h^3 b}$  zu verifizieren.

Dafür wird das Verhältnis der Steigungen  $\beta$  der Messungen mit dem Verhältnis der  $\frac{1}{h^3 b}$  verglichen, wobei im Idealfall  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{h_2^3 b_2}{h_1^3 b_1}$  gilt.

Verwendet wurde für diese Messung der Stahlstab mit den Maßen  $5,99 \pm 0,05$  mm und  $10,0 \pm 0,05$  mm, mit einem Abstand  $l = 798 \pm 1$  mm zwischen den Schneiden. In Tabelle 4.3 sind die Messungen dieser Messreihe und die mittlere Durchbiegung pro Belastungsgewicht aufgelistet. Die Mittelwerte wurden mit der Formel (4.6) berechnet.

Für die vertikale Ausrichtung wurde außerdem zwei Mal eine präzisere Messung mit exakt derselben Reihenfolge von Gewichten durchgeführt, um sowohl die Linearität (Hookesches Gesetz) als auch die Reproduzierbarkeit der Messungen im Allgemeinen zu überprüfen.

|                                             |       |        |        |        |        |        |        |       |       |       |
|---------------------------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| Stahl, Ausrichtung:                         |       |        |        |        |        |        |        |       |       |       |
| m in g                                      | 0     | 100    | 300    | 400    | 450    | 500    | 600    |       |       |       |
| s in mm aufsteigend                         | 0     | 0,27   | 0,86   | 1,15   | 1,30   | 1,45   | 1,73   |       |       |       |
| s in mm absteigend                          | -0,02 | 0,27   | 0,86   | 1,15   | 1,29   | 1,44   |        |       |       |       |
| Mittelwert in mm                            | -0,01 | 0,27   | 0,86   | 1,15   | 1,295  | 1,445  | 1,73   |       |       |       |
| Präzisionsmessung1: Stahl, Ausrichtung:     |       |        |        |        |        |        |        |       |       |       |
| m in g                                      | 0     | 100    | 200    | 300    | 400    | 600    | 650    | 700   | 800   | 1000  |
| s in mm aufsteigend                         | 0     | 0,09   | 0,19   | 0,29   | 0,40   | 0,61   | 0,67   | 0,72  | 0,82  | 1,04  |
| s in mm absteigend                          | 0     | 0,10   | 0,20   | 0,30   | 0,41   | 0,62   | 0,67   | 0,73  | 0,83  | 1,04  |
| Mittelwert in mm                            | 0     | 0,095  | 0,195  | 0,295  | 0,405  | 0,615  | 0,67   | 0,725 | 0,825 | 1,04  |
| Präzisionsmessung2: Stahl, Ausrichtung:     |       |        |        |        |        |        |        |       |       |       |
| m in g                                      | 0     | 100    | 200    | 300    | 400    | 600    | 650    | 700   | 800   | 1000  |
| s in mm aufsteigend                         | 0     | 0,10   | 0,20   | 0,31   | 0,42   | 0,63   | 0,69   | 0,74  | 0,83  | 1,05  |
| s in mm absteigend                          | 0     | 0,10   | 0,20   | 0,31   | 0,42   | 0,63   | 0,68   | 0,73  | 0,84  | 1,05  |
| Mittelwert in mm                            | 0     | 0,10   | 0,2    | 0,31   | 0,42   | 0,63   | 0,685  | 0,735 | 0,835 | 1,05  |
| Mittelwert beider Präzisionsmessungen in mm | 0     | 0,0975 | 0,1975 | 0,3025 | 0,4125 | 0,6225 | 0,6775 | 0,73  | 0,83  | 1,045 |

Tab. 4.3: Messwerte zu den Messreihe für den Einfluss der Ausrichtung

### Ausrichtungsabhängigkeit

Um die Abhängigkeit von der Ausrichtung zu überprüfen, wurden die Mittelwerte der Durchbiegung in Abhängigkeit vom Belastungsgewicht in Diagramm 4.2 eingetragen. Die Fehlerbalken sind dabei zwar vorhanden, jedoch so klein, dass sie nicht erkennbar sind. Für die horizontale Ausrichtung wurde die Steigung der Ausgleichsgerade per Hand bereits in Kapitel 4.2.1 (Formel 4.10) bestimmt, während die Ausgleichsgerade der Messung mit vertikaler Ausrichtung mittels linearer Regression (ohne Gewichtung) bestimmt wurde.

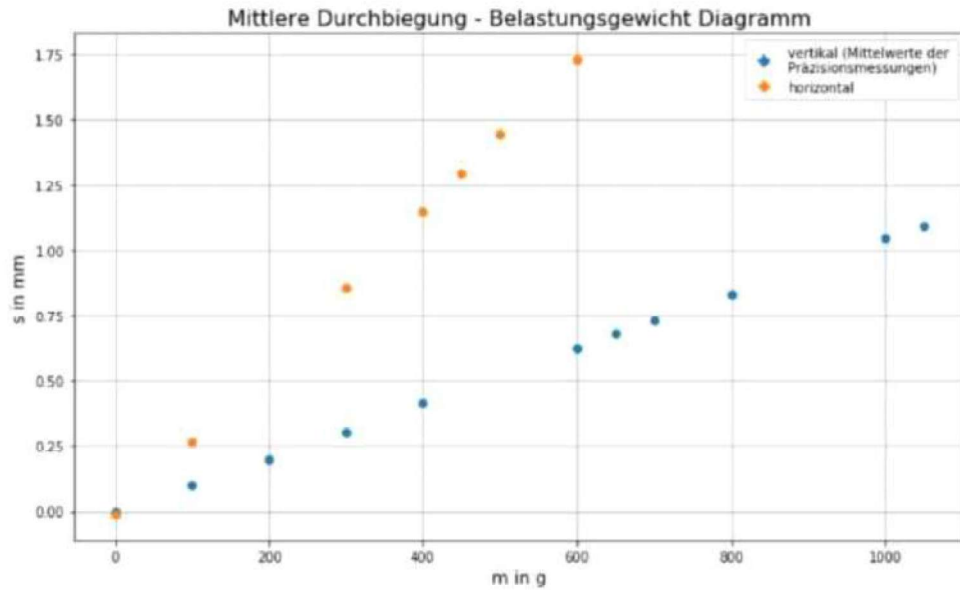


Abb. 4.2: Mittlere Durchbiegung-Belastungsgewicht-Diagramm für verschiedene Materialien

Für die Ausgleichsgerade  $y = a + \beta \cdot x$  bezüglich der vertikalen Ausrichtung ergeben sich also folgende Parameter:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{11} m_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{11} s_i - \sum_{i=1}^{11} m_i \cdot \sum_{i=1}^{11} m_i s_i}{11 \cdot \sum_{i=1}^{11} m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{11} m_i\right)^2} \approx -0,007 \text{ mm} \quad (4.17)$$

$$\beta = \frac{11 \cdot \sum_{i=1}^{11} m_i s_i - \sum_{i=1}^{11} m_i \cdot \sum_{i=1}^{11} s_i}{11 \cdot \sum_{i=1}^{11} m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{11} m_i\right)^2} \approx 0,001048 \frac{\text{mm}}{\text{g}}, \quad (4.18)$$

wobei die Streuung um das Modell

$$s_{\text{Streu}} = \sqrt{\frac{1}{11-2} \cdot \sum_{i=1}^{11} (s_i - (a_0 + \beta_0 m_i))^2} \approx 0,004 \text{ mm} \quad (4.19)$$

beträgt, woraus sich für die Unsicherheiten der Parameter

$$\Delta a = s_{\text{Streu}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} m_i^2}{11 \cdot \sum_{i=1}^{11} m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{11} m_i\right)^2}} \approx 0,002 \text{ mm} \quad \text{und} \quad (4.20)$$

$$\Delta \beta = s_{\text{Streu}} \cdot \sqrt{\frac{11}{11 \cdot \sum_{i=1}^{11} m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{11} m_i\right)^2}} \approx 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad (4.21)$$

ergibt.

Die so berechnete Ausgleichsgerade sieht folgendermaßen aus:

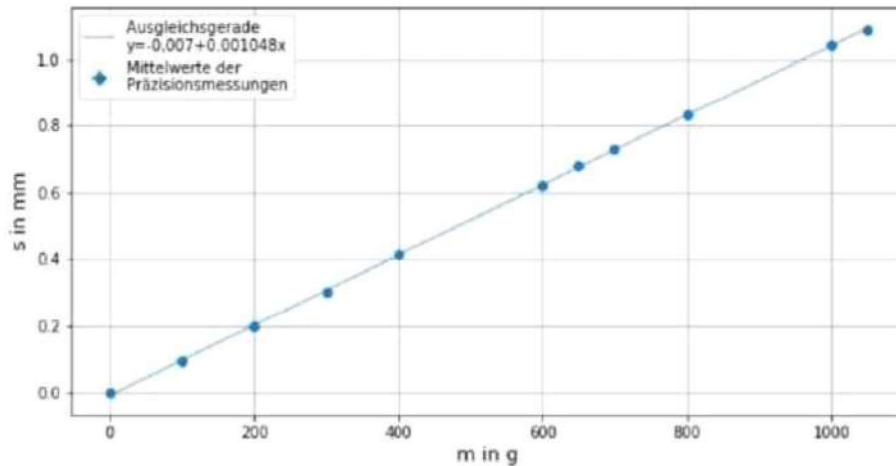


Abb. 4.3: Mit linearer Regression berechnete Ausgleichsgerade

Aus der Steigung  $\beta$  dieser Gerade lässt sich wieder das Elastizitätsmodul von Stahl berechnen: Mit Formel (4.12) für das Elastizitätsmodul  $E$  ergibt sich

$$E_{\text{Stahl},2} \approx (199 \pm 1) \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (4.22)$$

Die Unsicherheit des Elastizitätsmoduls lässt sich dabei mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (Formel (4.16)) berechnen. Der Mittelwert der beiden Ergebnisse für das Elastizitätsmodul von Stahl ist

$$\overline{E}_{\text{Stahl}} = \frac{1}{2}(200 + 199) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = (199,5 \pm 0,5) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (4.23)$$

mit einer Standardabweichung von

$$s_{E_{\text{Stahl}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^2 (s_i - \bar{s})^2} = 0,5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (4.24)$$

Für die horizontale Ausrichtung beträgt die Steigung also  $\beta_{\text{horizontal}} = 0,002936 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}}$  und für die vertikale Ausrichtung  $\beta_{\text{vertikal}} = 0,001048 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}}$ , wobei für die Höhen und Breiten der jeweiligen Ausrichtungen  $b_{\text{horizontal}} = h_{\text{vertikal}} = 10,00 \pm 0,005 \text{ mm}$  und  $h_{\text{horizontal}} = b_{\text{vertikal}} = 5,99 \pm 0,005 \text{ mm}$  gilt (siehe Kapitel 4.1).

Als Verhältnis der Steigungen ergibt sich damit

$$Q_{\beta} = \frac{\beta_{\text{horizontal}}}{\beta_{\text{vertikal}}} \approx 2,802 \pm 0,011 \quad (4.25)$$

wobei die Unsicherheit mit der Formel (Spezialfall der Gaußschen Fehlerfortpflanzung)

$$\Delta Q_{\beta} = Q_{\beta} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta \beta_{\text{horizontal}}}{\beta_{\text{horizontal}}}\right)^2 + \left((-1) \cdot \frac{\Delta \beta_{\text{vertikal}}}{\beta_{\text{vertikal}}}\right)^2} \quad (4.26)$$

berechnet wurde.

Als Verhältnis der  $\frac{1}{h^3 b}$  ergibt sich außerdem

$$Q_{h^3 b} = \frac{h_{\text{vertikal}}^3 b_{\text{vertikal}}}{h_{\text{horizontal}}^3 b_{\text{horizontal}}} \approx 2,787 \pm 0,007 \quad (4.27)$$

wobei der Fehler mit der Formel (Spezialfall der Gaußschen Fehlerfortpflanzung)

$$\Delta Q_{h^3 b} = Q_{h^3 b} \cdot \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \Delta h_{\text{vertikal}}}{h_{\text{vertikal}}}\right)^2 + \left(\frac{(-3) \cdot \Delta h_{\text{horizontal}}}{h_{\text{horizontal}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_{\text{vertikal}}}{b_{\text{vertikal}}}\right)^2 + \left(\frac{(-1) \cdot \Delta b_{\text{horizontal}}}{b_{\text{horizontal}}}\right)^2}$$

berechnet wurde.

### Reproduzierbarkeit und Hookesches Gesetz

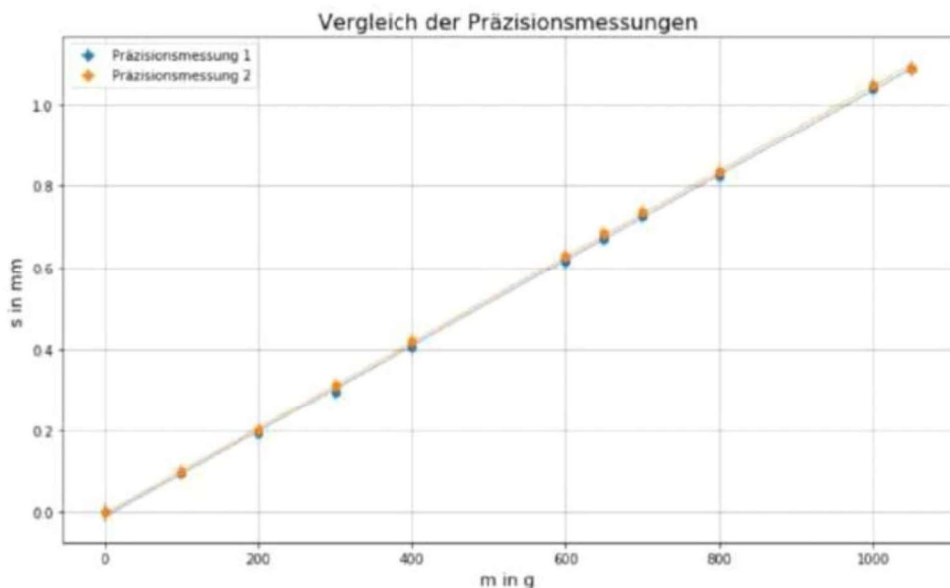


Abb. 4.4: Vergleich der beiden Präzisionsmessungen

In Abbildung 4.4 sind die Messwerte der beiden Präzisionsmessungen mit ihren jeweiligen Ausgleichsgeraden eingetragen. Die Fehlerbalken sind vorhanden, jedoch kaum erkennbar.

Wie man allerdings bei Vergrößerung sieht, liegen alle Werte für  $s$  innerhalb einer  $2\sigma$ -Umgebung voneinander.

✓ Man könnte hier die Steigung vergleichen

### 4.2.3 Einfluss des Abstands $l$

In diesem <sup>Abchnitt</sup> Kapitel wird der Einfluss des Abstands  $l$  zwischen den Schneiden auf die Durchbiegung  $s$  bestimmt. Es gilt die Proportionalität der Durchbiegung  $s$  zu  $l^3$  zu verifizieren. Dafür wird das Verhältnis der Steigungen  $\beta$  der Messungen mit den Längenverhältnissen der  $l^3$ , wobei im Idealfall  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3}$  gilt.

In dieser Messung wurde der Messingstab mit der gemittelten Breite  $b = 10,0 \pm 0,05$  mm und der gemittelten Höhe  $h = 6,0 \pm 0,05$  mm verwendet.



In der Tabelle 4.4 sind die Messungen dieser Messreihe und der Mittelwert der Durchbiegungen  $s$  aufgelistet. Die Mittelwerte wurden mit der Formel (4.6) berechnet.

|                                   |       |      |       |      |      |       |      |
|-----------------------------------|-------|------|-------|------|------|-------|------|
| <b>Messing: L1 = (789 ± 1) mm</b> |       |      |       |      |      |       |      |
| m in g                            | 0     | 100  | 200   | 250  | 300  | 400   | 450  |
| s in mm aufsteigend               | 0     | 0,62 | 1,26  | 1,65 | 1,97 | 2,61  | 2,94 |
| s in mm absteigend                | -0,02 | 0,62 | 1,29  | 1,63 | 1,95 | 2,62  |      |
| Mittelwert in mm                  | -0,01 | 0,62 | 1,275 | 1,64 | 1,96 | 2,615 | 2,94 |

|                                   |        |       |      |       |      |       |      |
|-----------------------------------|--------|-------|------|-------|------|-------|------|
| <b>Messing: L2 = (640 ± 1) mm</b> |        |       |      |       |      |       |      |
| m in g                            | 0      | 200   | 300  | 350   | 400  | 500   | 550  |
| s in mm aufsteigend               | 0      | 0,66  | 1,03 | 1,17  | 1,37 | 1,71  | 1,88 |
| s in mm absteigend                | -0,01  | 0,69  | 1,03 | 1,2   | 1,37 | 1,7   |      |
| Mittelwert                        | -0,005 | 0,675 | 1,03 | 1,185 | 1,37 | 1,705 | 1,88 |

Tab. 4.4: Messwerte der Messreihen für den Einfluss des Abstands  $l$

Die berechneten Mittelwerte der Durchbiegung  $s$  werden mit den zugehörigen Belastungsgewichten in Diagramm 4.5 eingezeichnet. Die Fehlerbalken sind eingetragen, jedoch sind sie so klein, dass man sie im Diagramm nicht erkennen kann. Der Fehler der Belastungsgewichte ergibt sich durch Schätzung der Probemessungen mit  $\Delta m = \pm 1$  g und die Unsicherheit der mittleren Durchbiegung wurde mit Hilfe der Formel (4.7) berechnet.

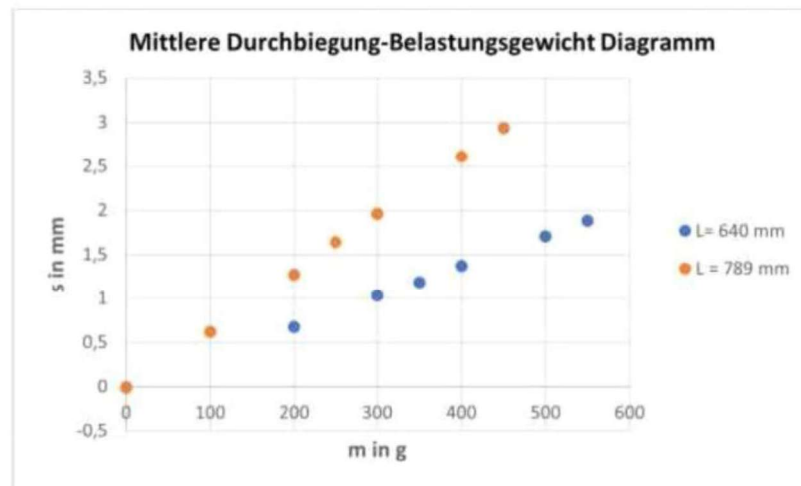


Abb. 4.5: Mittlere Durchbiegung-Belastungsgewicht-Diagramm für verschiedene Abstände

Die Steigung der Ausgleichsgerade zu den orangenen Messwerten in Abb. 4.5 wurde bereits in Kapitel 4.2.1 bestimmt. Die Ausgleichsgerade der blauen Messwerte und deren Steigung wurde von Hand graphisch bestimmt. Das zugehörige Diagramm ist in Anhang 7 zu finden. So ergeben sich die Steigungen

$$\beta_1 = (0,0066 \pm 4 \cdot 10^{-6}) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad \text{und} \quad (4.28)$$

$$\beta_2 = \left( \frac{1,87}{544,3} \pm 4 \cdot 10^{-6} \right) \frac{\text{mm}}{\text{g}} = (0,0034 \pm 4 \cdot 10^{-6}) \frac{\text{mm}}{\text{g}}, \quad (4.29)$$

also ergibt sich als Verhältnis

$$Q_\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{0,0066}{0,0034} \pm 8 \cdot 10^{-3} \approx 1,941 \pm 8 \cdot 10^{-3} . \quad (4.30)$$

Die Unsicherheit des Verhältnisses  $Q_\beta$  wurde dabei über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$s_{Q_\beta} = Q_\beta \cdot \sqrt{\left(3 \frac{\Delta \beta_1}{\beta_1}\right)^2 + \left(3 \frac{\Delta \beta_2}{\beta_2}\right)^2} = 8 \cdot 10^{-3} . \quad (4.31)$$

Vergleicht man dies mit dem Verhältnis der Abstände  $l^3$ , ergibt sich

$$Q_l = \frac{l_1^3}{l_2^3} = \frac{789^3}{640^3} \pm 0,0004 = 1,8737 \pm 0,0004 , \quad (4.32)$$

wobei die Unsicherheit für  $Q_l$  über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet wurde:

$$s_{Q_l} = Q_l \cdot \sqrt{\left(3 \frac{\Delta l_1}{l_1}\right)^2 + \left(3 \frac{\Delta l_2}{l_2}\right)^2} = 0,0004 . \quad (4.33)$$

Mit Hilfe des zweiten Messingversuchs kann ebenfalls wieder das Elastizitätsmodul von Messing bestimmt und ein Mittelwert beider Ergebnisse berechnet werden. Mit der Formel (4.12) zum Elastizitätsmodul  $E$  ergibt sich also

$$E_{\text{Messing},2} \approx (87,54 \pm 0,4) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} . \quad (4.34)$$

Die Unsicherheit des Elastizitätsmoduls wurde dabei mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (Formel (4.16)) berechnet.

Der Mittelwert der beiden Ergebnisse des Elastizitätsmoduls von Messing ist damit

$$\overline{E_{\text{Messing}}} = \frac{1}{2}(87,42 + 87,54) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = (87,48 \pm 0,06) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} , \quad (4.35)$$

mit einer Standardabweichung von

$$s_{E_{\text{Messing}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^2 (s_i - \bar{s})^2} = 0,06 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} . \quad (4.36)$$

### 4.3 Zusätzliche Kräfte auf die Stäbe

Es existieren einige zusätzliche Kräfte, welche auf die Stäbe wirken. Dieser Einfluss verschiebt lediglich nur den Nullpunkt und ist somit nicht von Bedeutung, solange man sich im Proportionalitätsbereich aufhält. Trotzdem werden im folgenden einige dieser zusätzlichen Kräfte diskutiert.



### Eigengewicht der Stäbe

Um die Gewichtskraft, welche zwischen den Schneiden wirkt, zu berechnen, muss zuerst der Anteil des Gewichtes der Stäbe, welcher zwischen den Schneiden ist, bestimmt werden. Während des Versuchs wurde die komplette Masse aller Stäbe gewogen

$$m_{\text{Aluminium}} = (158,54 \pm 0,02)\text{g}, \quad m_{\text{Stahl}} = (466,17 \pm 0,02)\text{g}, \quad m_{\text{Messing}} = (498,94 \pm 0,02)\text{g} \quad (4.37)$$

Man kann davon ausgehen, dass das Gewicht homogen verteilt ist. Die Stäbe haben je eine Gesamtlänge von

$$L_{\text{Aluminium}} = (1000,5 \pm 0,5)\text{mm}, \quad L_{\text{Stahl}} = (1000,0 \pm 0,5)\text{mm}, \quad L_{\text{Messing}} = (1000,0 \pm 0,5)\text{mm} . \quad (4.38)$$

Der Fehler der Längenmessung wurde dabei abgeschätzt.

In den Messreihen Materialabhängigkeit und Einfluss der Ausrichtung wird der Abstand  $l_1 = 798 \pm 1$  mm zwischen den Schneiden verwendet. Damit kann das Gewicht zwischen den Schneiden berechnet werden:

$$m_{l_1} = m_{\text{ges.}} \cdot \frac{l_1}{L_{\text{ges}}} . \quad (4.39)$$

Daraus ergeben sich folgende Massen für die unterschiedlichen Materialien zwischen den Schneiden:

$$m_{l_1, \text{Alu}} \approx 126,45\text{g}, \quad m_{l_1, \text{Stahl}} \approx 372,00\text{g}, \quad m_{l_1, \text{Messing}} \approx 398,15\text{g}. \quad (4.40)$$

Mit der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  (Quelle 1) kann die Gewichtskraft  $F = m \cdot g$  der drei Stäbe bestimmt werden

$$F_{\text{Alu}} = 1,24\text{N}, \quad F_{\text{Stahl}} = 3,65\text{N}, \quad F_{\text{Messing}} = 3,91\text{N} . \quad (4.41)$$

### Gewicht der Halterung

Das Gewicht der Halterung wurde während des Versuchs gemessen  $m_{\text{Halterung}} = (50,25 \pm 0,02)$  g. Es handelt sich hierbei somit um eine zusätzliche Gewichtskraft von  $F = m \cdot g = 0,493$  N, wobei mit der selben Erdbeschleunigung (Quelle 1) gerechnet wurde.

### Andruckkraft der Messuhr

Aus der Versuchsanleitung weiß man, dass die Druckkraft der Feder im Messgerät annähernd konstant ist und etwa einem Zusatzgewicht von 80 bis 100 g entspricht. So entsteht eine zusätzliche Andruckkraft von 0,785 bis 0,981 N.





## 5 Zusammenfassung und Diskussion

### 5.1 Materialabhängigkeit

Beim Vergleich aller drei Messungen mit unterschiedlichen Materialien und sonst gleichen Voraussetzungen ist zu erkennen, dass die Durchbiegung  $s$  von den Materialien abhängig ist. Trägt man die Messwerte in ein Belastungsgewicht-mittlere Durchbiegungs Diagramm ein, kann man erkennen dass jede Messung für sich annähernd eine Gerade bildet. Man erhält für die drei Ausgleichsgeraden der Materialien die Steigungen

Für Aluminium:

$$\beta_{\text{Aluminium}} = \frac{2,65 \text{ mm}}{297,6 \text{ g}} \approx 0,008905 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

Das müsste ihr nicht nochmal aufschreiben.  
Spannend ist hier E

Für Messing:

$$\beta_{\text{Messing}} = \frac{2,53 \text{ mm}}{384,0 \text{ g}} \approx 0,006589 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad (5.2)$$

Für Stahl:

$$\beta_{\text{Stahl}} = \frac{1,76 \text{ mm}}{561,3 \text{ g}} \approx 0,002936 \pm 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad (5.3)$$

Mit Hilfe dieser Steigungen können die Elastizitätsmoduln der einzelnen Materialien bestimmt werden. Es ist zu erkennen, dass die Unsicherheit unserer Steigungen, welche wir aus einer Linearen Regression gewonnen haben, sehr klein ist. Vor allem da die anderen Ausgleichsgeraden und Steigungen von Hand bestimmt wurden. Es handelt sich somit nur um eine Näherung der möglichen Unsicherheit. Die einzelnen Messungen streuten auch unterschiedlich weit um eine mögliche Ausgleichsgerade, so dass es sich sicherlich nur um eine allgemeine Näherung der Unsicherheit handelt.

### 5.2 Einfluss der Ausrichtung

Für dasselbe Material mit demselben Abstand  $l$  zwischen den Schneiden, aber in zwei unterschiedlichen Ausrichtungen, ergibt sich aus den Messungen, dass die Ausrichtung mit größerer Höhe wesentlich steifer ist und sich weniger durchbiegt, was aus der Formel für den Biegunspfeil auch so zu erwarten war.

Nach der Formel für den Biegunspfeil ist die Durchbiegung  $s$  antiproportional zu  $h^3b$ . Um dies zu überprüfen, muss für die Steigungen der Ausgleichsgeraden zweier Messungen mit verschiedenen Ausrichtungen

$$\frac{\beta_{\text{horizontal}}}{\beta_{\text{vertikal}}} = \frac{h_{\text{vertikal}}^3 b_{\text{vertikal}}}{h_{\text{horizontal}}^3 b_{\text{horizontal}}} \quad (5.4)$$

gelten.

Bei unserer Messung erhielten wir für die beiden Quotienten

$$Q_{\beta} = 2,802 \pm 0,011 \quad \text{und} \quad (5.5)$$

$$Q_{h^3b} = 2,787 \pm 0,007 \quad . \quad (5.6)$$

Vergleicht man diese miteinander, ergibt sich als Abweichung

$$t = \frac{|Q_\beta - Q_{h^3b}|}{\sqrt{(\Delta Q_\beta)^2 + (\Delta Q_{h^3b})^2}} \approx 1,15 < 2 \quad , \quad (5.7)$$

also sind die beiden Ergebnisse miteinander verträglich.

Die Beziehung  $s \propto \frac{1}{h^3b}$  wurde somit also verifiziert. 

Dass die Quotienten trotz der sehr geringen Unsicherheiten der Messwerte so nah beieinander liegen, liegt vermutlich daran, dass als Material Stahl verwendet wurde, was ein sehr hohes Elastizitätsmodul hat und deshalb sehr unnachgiebig ist, sodass kaum systematische Fehler durch z.B. Randeffekte entstehen.

### 5.3 Einfluss der Länge $l$

Die Aufgabe war es, die Proportionalität von  $l^3$  zur Durchbiegung  $s$  zu verifizieren. Dazu sollte eine Näherung von

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} \quad (5.8)$$

existieren. Für den Quotienten der Steigungen erhält man mit unseren Messung

$$Q_\beta = 1,941 \pm 8 \cdot 10^{-3} \quad (5.9)$$

und für den Quotienten der Längen  $l^3$  ergibt sich

$$Q_l = 1,8737 \pm 0,0004. \quad (5.10)$$

Vergleicht man nun diese beiden Quotienten, in dem man die Abweichung zwischen den beiden Werten in Einheiten einer kombinierten Standardunsicherheit berechnet

$$t = \frac{|Q_\beta - Q_l|}{\sqrt{(\Delta s_{Q_\beta})^2 + (\Delta Q_l)^2}} = 8,4, \quad (5.11)$$

so erkennt man, dass diese sehr groß ist. Mit diesem Wert  $t$  sollte man eigentlich davon ausgehen, dass die Ergebnisse inkompatibel sind. Unsere Unsicherheiten sind jedoch auch sehr klein und so ist gut möglich, dass einige Unsicherheiten aufgetreten sind, welche nicht in unsere Rechnung eingeflossen sind. Mögliche Fehler werden für alle Messreihen gemeinsam am Ende diskutiert. Vor dem Hintergrund der geringen Durchbiegung und der hieraus resultierenden Unsicherheiten ist eine Abweichung der Quotienten von 3,5 % als gering einzuschätzen, sodass die Proportionalität trotzdem als bestätigt angesehen werden kann. 

### 5.4 Reproduzierbarkeit und Hookesches Gesetz

Wie man bereits in Abb. 4.4 sieht, liegen die Messwerte für die Durchbiegung  $s$  für beide Präzisionsmessungen sehr nah beieinander. Prüft man die Verträglichkeit der Messwerte mit der Formel

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{(\Delta s_1)^2 + (\Delta s_2)^2}} \quad (5.12)$$

$$t < 2: s_1 \text{ und } s_2 \text{ sind verträglich} \quad (5.13)$$

$$t > 2: s_1 \text{ und } s_2 \text{ sind nicht verträglich} \quad (5.14)$$

so ergibt sich (mit  $\Delta s_1 = \Delta s_2 = 0,01\text{mm}$ ) für alle Wertepaare  $(s_{1i}, s_{2i})$   $t_i < 2$ , also ist die Messung reproduzierbar und aufeinanderfolgende Messungen mit dem selben Stab sind nicht zusätzlich fehlerbelastet.

Die Reproduzierbarkeitsmessungen wurden jedoch mit dem Stahlstab in vertikaler Ausrichtung durchgeführt, was die stabilste Kombination von Material und Ausrichtung ist. Hätte man stattdessen Aluminium in horizontaler Ausrichtung verwendet, was die am wenigsten stabile Kombination ist, hätte sich sicherlich ein größerer Fehler ergeben, besonders, weil deshalb während der Messung die Durchbiegung  $s$  schnell größer als 3mm ist.

Wie man außerdem in dem Diagramm in Abbildung 4.4 sehen kann, ergibt sich zwischen angehängter Masse und Durchbiegung ein fast perfekt linearer Zusammenhang. Die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes wurde also ebenfalls verifiziert. Dass die Linearität so gut gilt, liegt aber vermutlich auch an der Verwendung von Stahl in vertikaler Ausrichtung. Für Aluminium in horizontaler Ausrichtung hätte sich nämlich eventuell plastische Verformung ergeben.

Nachweis durch  
z.B. Pearson R-Test

## 5.5 Elastizitätsmoduln

Für die drei Materialien wurden folgende Elastizitätsmoduln bestimmt:

$$E_{\text{Alu}} \approx (64,8 \pm 0,3) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (5.15)$$

$$E_{\text{Messing}} \approx (87,54 \pm 0,06) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{und} \quad (5.16)$$

$$E_{\text{Stahl}} \approx (199,5 \pm 0,5) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (5.17)$$

Die Literaturwerte für die Elastizitätsmoduln sind

$$E_{\text{Alu}} = 69 \text{ bis } 72,5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (5.18)$$

$$E_{\text{Messing}} = 90 \text{ bis } 95 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{und} \quad (5.19)$$

$$E_{\text{Stahl}} = 195 \text{ bis } 210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (5.20)$$

(aus Quelle 2).

Es liegt also nur das im Versuch bestimmte Elastizitätsmodul von Stahl innerhalb des Rahmens des Literaturwerts.

Wie man jedoch bereits an den Literaturwerten sieht, ist es schwer, für die Materialien einen eindeutigen Literaturwert für das Elastizitätsmodul festzulegen. Das liegt daran, dass Stahl und Messing keine reinen Metalle sind und auch Aluminium nicht immer reines Aluminium ist. Man kann also davon ausgehen, dass die im Versuch verwendeten Aluminium- und Messingstäbe eine andere Zusammensetzung hatten als die, mit denen die Literaturwerte bestimmt wurden. Die Messungen für die Elastizitätsmoduln wurden nämlich alle mehrmals unter exakt gleichen Bedingungen durchgeführt, deshalb sind die Abweichungen wahrscheinlich nicht statistischer Natur.

ok

### Mögliche weitere Fehlerquellen

Wie in der Diskussion bereits mehrmals beschrieben, könnten weitere Fehlerquellen existieren, welche zu Unsicherheiten in den Ergebnissen führen. In der Auswertung wurden bereits einige zusätzliche Kräfte beschrieben, und auch wenn diese im linearen Bereich normalerweise nur

den Nullpunkt verschieben, könnte es trotzdem zu Unsicherheiten durch diese Kräfte gekommen sein.

Ein weiterer möglicher Fehler könnte die Messung der Durchbiegung  $s$  sein. Da diese Durchbiegung sehr klein ist und das Messgerät sehr feine Unterschiede messen muss, könnten Fehler entstanden sein, die größer sind als nur die Rundungsungenauigkeit der digitalen Anzeige. Dies kann man auch daran erkennen, dass beim Anbringen und Abnehmen der Gewichte unterschiedliche Durchbiegungen  $s$  angezeigt wurden.

Und obwohl die Reproduzierbarkeit überprüft wurde, kann durch das mehrmalige Messen des Elastizitätsmoduls eines Stabes durchaus trotzdem eine systematische Unsicherheit entstanden sein, da vor allem Aluminium sehr leicht biegsam ist und deshalb eventuell plastisch verformt wurde.

### 5.5.1 Zusammenfassung

Das Diagramm (Abb. 5.1) ist eine Zusammenfassung aller Ergebnisse dieses Versuchs. Man kann die Abhängigkeit der Nachgiebigkeit zur Ausrichtung, zur Länge  $l$  und zum Material erkennen.

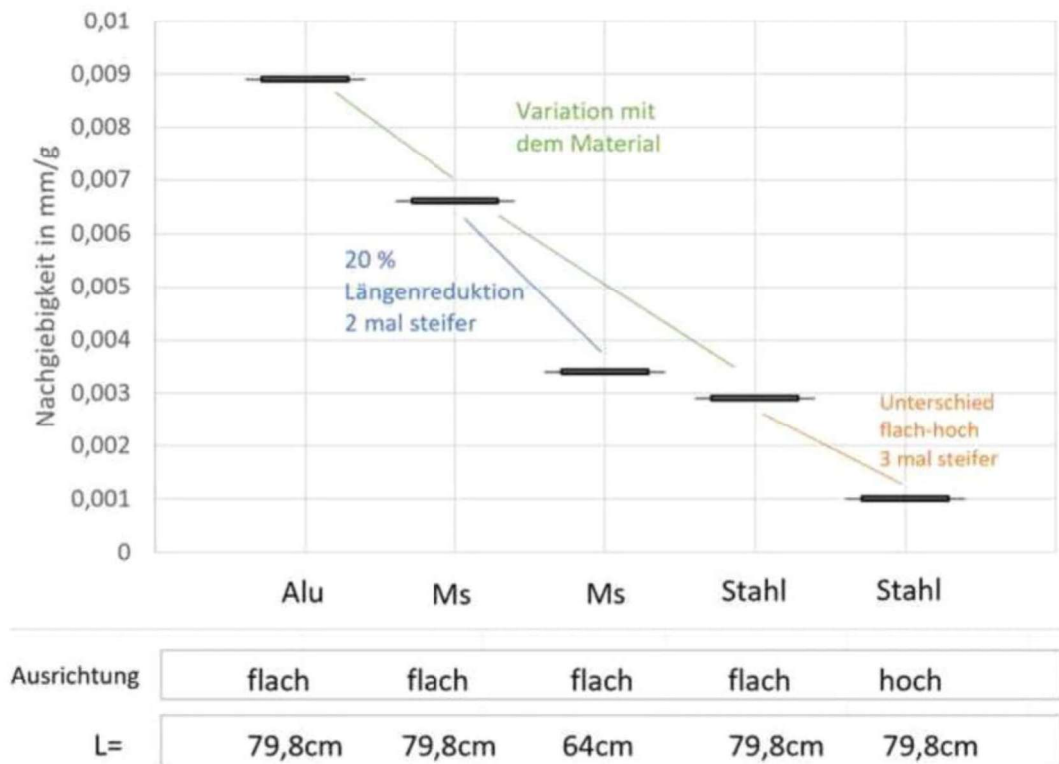


Abb. 5.1: Zusammenfassung des Versuchs

## 6 Literaturverzeichnis

Quelle 1: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwerefeld>, 22.09.2020

Quelle 2: Versuchsanleitung, Tabelle 6.1

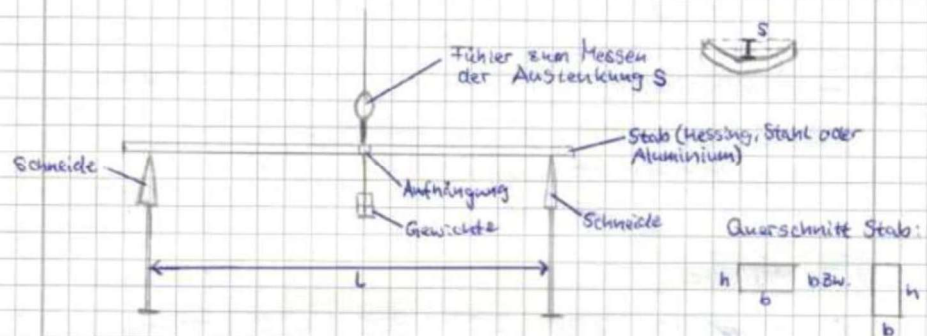




## 7 Anhang

### Versuch 6: Bestimmung des Elastizitätsmodul aus der Biegung

#### Versuchsaufbau



Messung 1: Materialabhängigkeit: Abstand der Schnellen:  $798 \pm 1 \text{ mm}$

#### 1.1 Stahl

a) Breite und Höhe mit Messschieber

$$b_s = 10,0 \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$h_s = 6,0 \pm 0,05 \text{ mm}$$

b) Gewichte mit Waage gemessen

$$m_{\text{Aufhänger}} = 19,93 \pm 0,02 \text{ g}$$

$$m_{\text{Stahl-Stab}} = 466,17 \pm 0,02 \text{ g}$$

$$m_{\text{Alu-Stab}} = 158,54 \pm 0,02 \text{ g}$$

$$m_{\text{Messing-Stab}} = 498,94 \pm 0,02 \text{ g}$$

$$m_{\text{Gewicht-Aufhänger}} = 50,32 \pm 0,0$$

Massen zur Probe:

$$m_{200\text{g}} = 199,94 \pm 0,02 \text{ g}$$

$$m_{50\text{g}} = 49,95 \pm 0,02 \text{ g}$$

$$m_{100\text{g}} = 100,05 \pm 0,02 \text{ g}$$

|                  |       |       |       |       |       |       |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| c) Gewicht in g  | 100   | 300   | 400   | 450   | 500   | 600   |
| Auslenkung in mm | -0,27 | -0,86 | -1,15 | -1,30 | -1,45 | -1,73 |
|                  | 500   | 450   | 400   | 300   | 100   | 0     |
|                  | -1,44 | -1,29 | -1,15 | -0,86 | -0,27 | +0,02 |

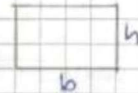
|                       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Gewicht<br>in g       | 100   | 150   | 200   | 250   | 300   | 350   | 300   | 250   |
| Auslenk-<br>ung in mm | -0,81 | -1,32 | -1,71 | -2,20 | -2,61 | -3,07 | -2,57 | -2,15 |
|                       | 200   | 150   | 100   | 0     |       |       |       |       |
|                       | -1,73 | -1,24 | -0,86 | -0,06 |       |       |       |       |

### \* 1.2 Aluminium

Breite und Höhe mit Messschieber

$$b_A = 10,0 \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$h_A = 6,0 \pm 0,05 \text{ mm}$$



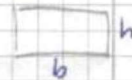
### 1.3 Messung

|         |       |       |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| m in g  | 100   | 200   | 250   | 300   | 400   | 450   |
| s in mm | -0,62 | -1,26 | -1,65 | -1,97 | -2,61 | -2,94 |
|         | 400   | 300   | 250   | 200   | 100   | 0     |
|         | -2,62 | -1,95 | -1,63 | -1,29 | -0,62 | +0,02 |

Breite und Höhe mit Messschieber

$$b_M = 10,0 \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$h_M = 6,0 \pm 0,05 \text{ mm}$$



### Messung 2: Abhängigkeit von der Ausrichtung

Material: Stahl,  $L = 7,98 \pm 1 \text{ mm}$

☐ siehe Rückseite

☐ Präzisionsmessung

#### P.-Messung 1

|         |       |       |       |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| m in g  | 100   | 200   | 300   | 400   | 600   | 650   | 700   |
| s in mm | -0,09 | -0,19 | -0,29 | -0,40 | -0,61 | -0,67 | -0,72 |
|         | 800   | 1000  | 1050  | 1000  | 800   | 700   | 650   |
|         | -0,82 | -1,04 | -1,09 | -1,04 | -0,83 | -0,73 | -0,67 |
|         | 600   | 400   | 300   | 200   | 100   | 0     |       |
|         | -0,62 | -0,41 | -0,30 | -0,20 | -0,10 | 0,00  |       |

#### P.-Messung 2

|         |       |       |       |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| m in g  | 100   | 200   | 300   | 400   | 600   | 650   | 700   |
| s in mm | -0,10 | -0,20 | -0,31 | -0,42 | -0,63 | -0,69 | -0,74 |
|         | 800   | 1000  | 1050  | 1000  | 800   | 700   | 650   |
|         | -0,83 | -1,05 | -1,09 | -1,05 | -0,84 | -0,73 | -0,78 |
|         | 600   | 400   | 300   | 200   | 100   | 0     |       |
|         | -0,63 | -0,42 | -0,31 | -0,20 | -0,10 | 0,00  |       |

Anhang 2: Rohdaten, Teil 2

### Messung 3: Abhängigkeit von L

Material: Messing, Ausrichtung ☐

Länge 1

Länge 2:  $L = 640 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$

| m in g  | 200   | 300                  | 350   | 400   | 500   | 550   |
|---------|-------|----------------------|-------|-------|-------|-------|
| s in mm | -0,66 | <del>0,8</del> -1,03 | -1,17 | -1,37 | -1,71 | -1,88 |
|         | 500   | 400                  | 350   | 300   | 200   | 0     |
|         | -1,70 | -1,37                | -1,20 | -1,03 | -0,69 | +0,01 |

für alle Messungen: Unsicherheit für m:  $\pm 1 \text{ g}$   
 " für s:  $\pm 0,01 \text{ mm}$

### Ausmaße der Stäbe

1) siehe ●

~~2) Messing~~  
~~Stahl~~

h   
 b

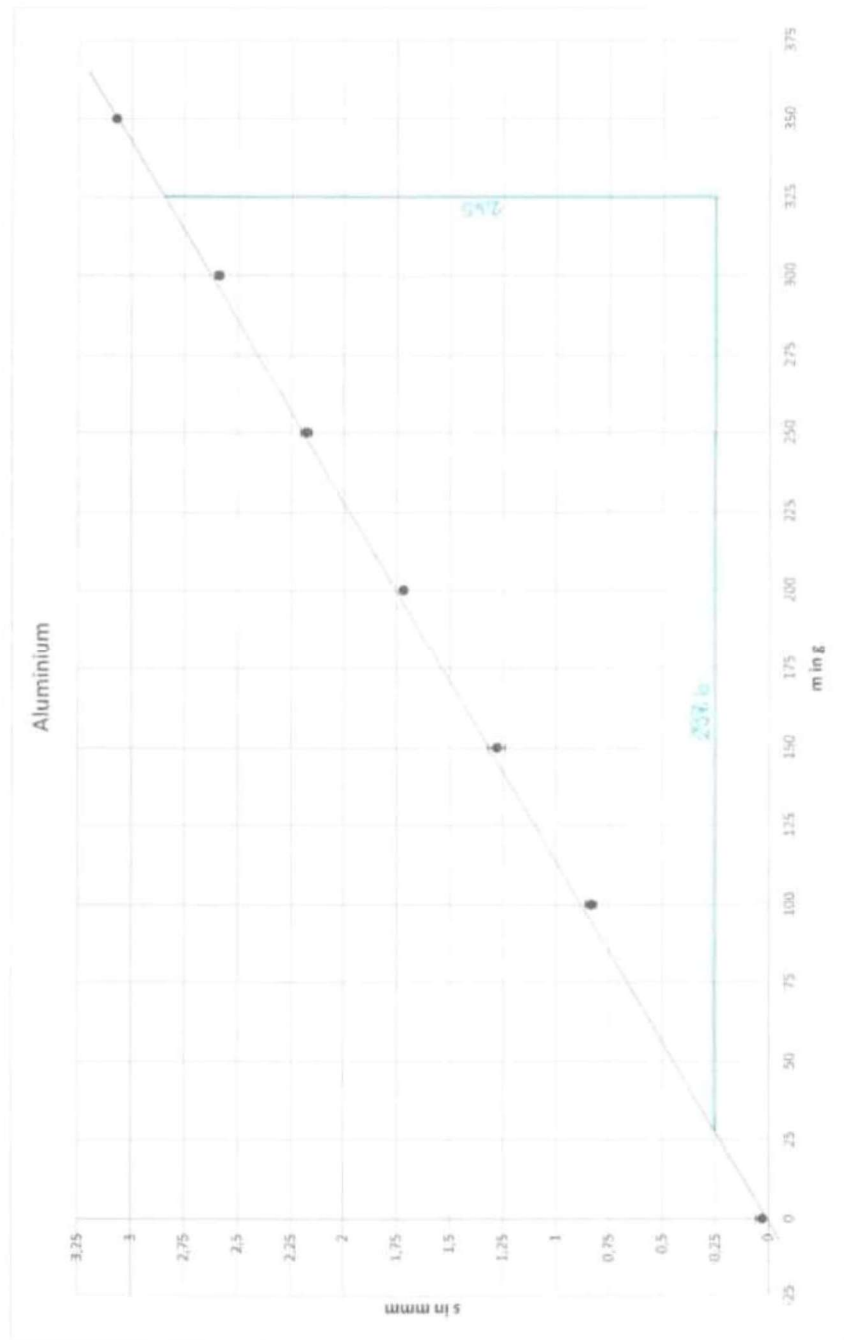
|    | Messing |     | Stahl          |      | Aluminium |      |                       |
|----|---------|-----|----------------|------|-----------|------|-----------------------|
|    | b       | h   | <del>b</del> h | b    | b         | h    | in mm                 |
| 2) | 10,0    | 6,0 | 6,0            | 10,0 | 10,0      | 6,0  |                       |
| 3) | 10,0    | 6,0 | 5,95           | 10,0 | 10,0      | 6,05 | Unsicherheit:         |
| 4) | 10,0    | 6,0 | 6,0            | 10,0 | 10,0      | 6,0  | $\pm 0,05 \text{ mm}$ |
| 5) | 10,0    | 6,0 | 6,0            | 10,0 | 10,0      | 6,0  |                       |

Länge Stab:  
 $100,05 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ mm}$

Länge Stab:  
 $100 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ mm}$

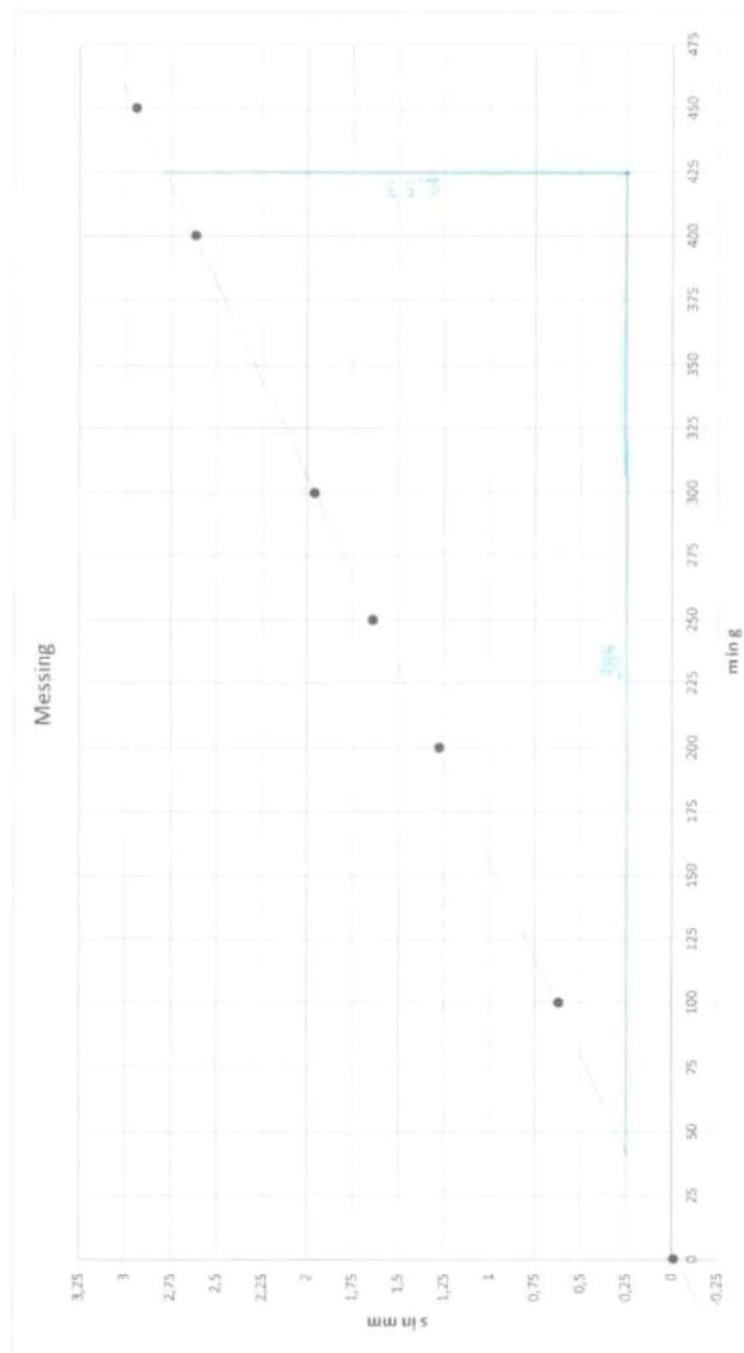
Länge Stab:  
 $100 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ mm}$

VT 17.09.20



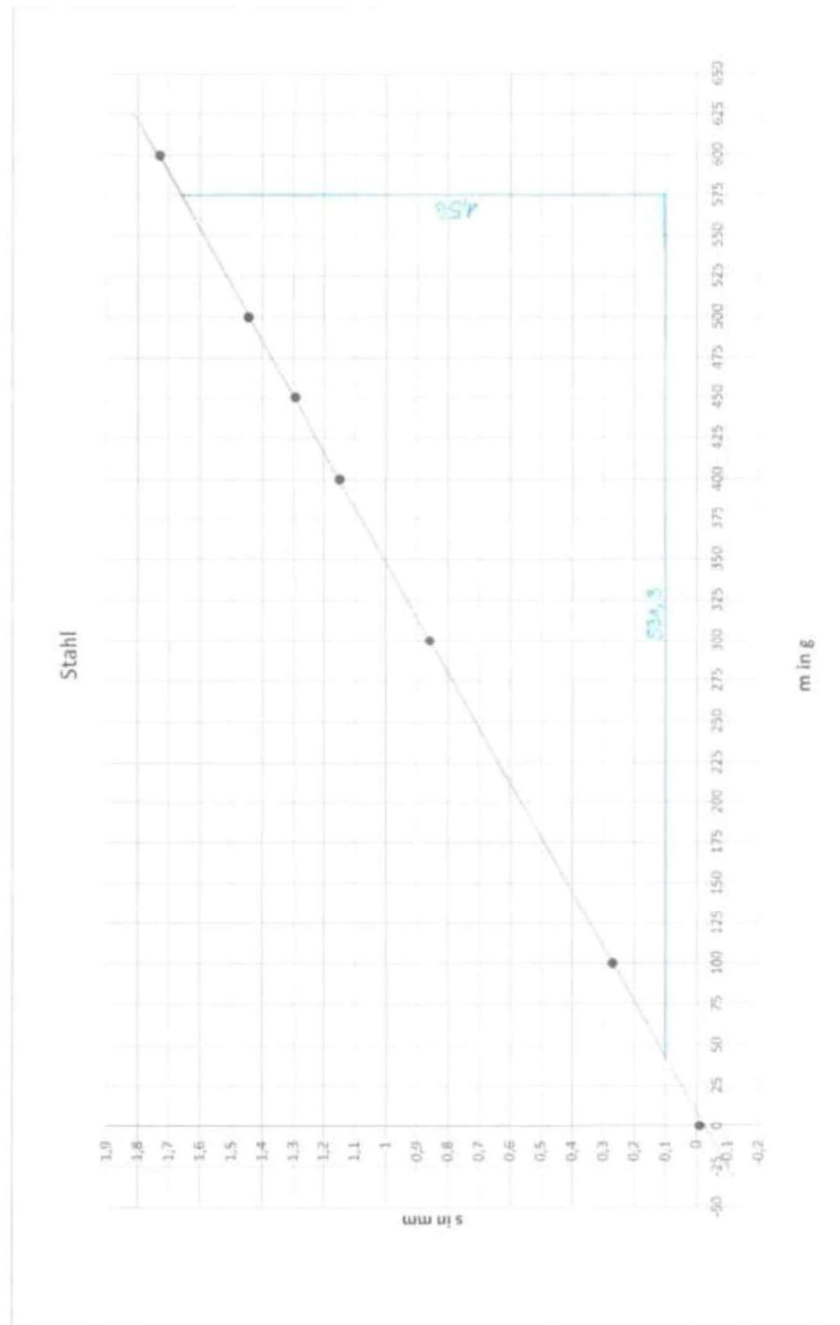
Anhang 4: Messreihe: Materialabhängigkeit-Aluminium, Bestimmung der Ausgleichsgeraden <sup>gut</sup>

Ausrichtung,  $L^2$ .



Anhang 5: Messreihe: Materialabhängigkeit-Messing, Bestimmung der Ausgleichsgeraden





Anhang 6: Messreihe: Materialabhängigkeit-Stahl, Bestimmung der Ausgleichsgeraden



Stahl 2.



Anhang 7: Messreihe: Einfluss der Länge L-Stahl, Bestimmung der Ausgleichsgeraden