

Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2020

Versuch 23: Schallwellen



Durchgeführt am 01.10.2020

Assistent:



Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	3
2	Versuchsaufbau	4
3	Durchführung	6
3.1	Versuchsteil 1	6
3.2	Versuchsteil 2	6
4	Auswertung und Fehleranalyse	8
4.1	Versuchsteil 1: Ultraschall, Messung der Wellenlänge	8
4.2	Versuchsteil 2: Ultraschall, Messung der Laufzeit	10
5	Zusammenfassung und Diskussion	12
5.1	Schallgeschwindigkeit	12
5.2	Fehlerquellen	12
6	Literaturverzeichnis	14
7	Anhang	15

1 Ziel des Versuchs

Das Ziel des Versuchs ist es, die Schallgeschwindigkeit von Ultraschallwellen in Luft zu bestimmen. Dafür werden zwei verschiedene Methoden verwendet¹. Im ersten Teil des Versuches wird bei bekannter Frequenz die Phasenverschiebung einer Ultraschallwelle gemessen, im zweiten Versuchsteil wird dagegen die Laufzeit eines Ultraschallsignals über eine bekannte Strecke bestimmt. Aus beiden Versuchsteilen lässt sich dann jeweils die Schallgeschwindigkeit berechnen.

¹ursprünglich gehörte zu dem Versuch noch ein dritter Versuchsteil (Quinckesches Resonanzrohr), der jedoch nicht durchgeführt werden konnte

2 Versuchsaufbau

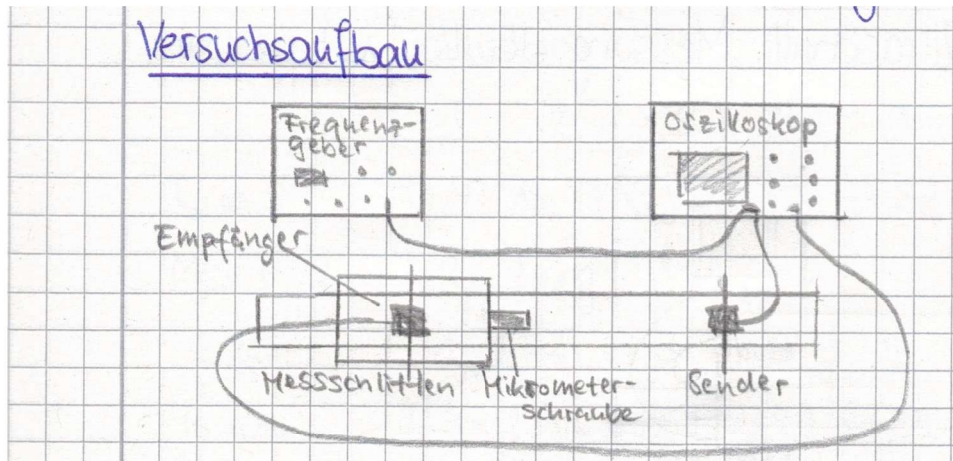


Abb. 2.1: Versuchsaufbau 1: Ultraschall, Messung der Wellenlänge

Der Versuchsaufbau des ersten Teils ist in Abbildung 2.1 skizziert. Verwendet werden ein Ultraschallsender und ein Ultraschallempfänger, die auf einer optischen Bank montiert sind. Der Sender ist dabei fest verankert, der Empfänger befindet sich dagegen gegenüber dem Sender auf einem verschiebbaren Messschlitten, auf dem sich mit einer Mikrometerschraube die Position des Empfängers ebenfalls verschieben lässt.

Der Sender wird an einen Frequenzgenerator angeschlossen, sodass er einen Dauerton mit ungefähr 40kHz sendet. Sowohl der Sender als auch der Empfänger sind an ein Oszilloskop angeschlossen, auf dem man die ausgesendete und empfangene Sinusschwingung sieht.

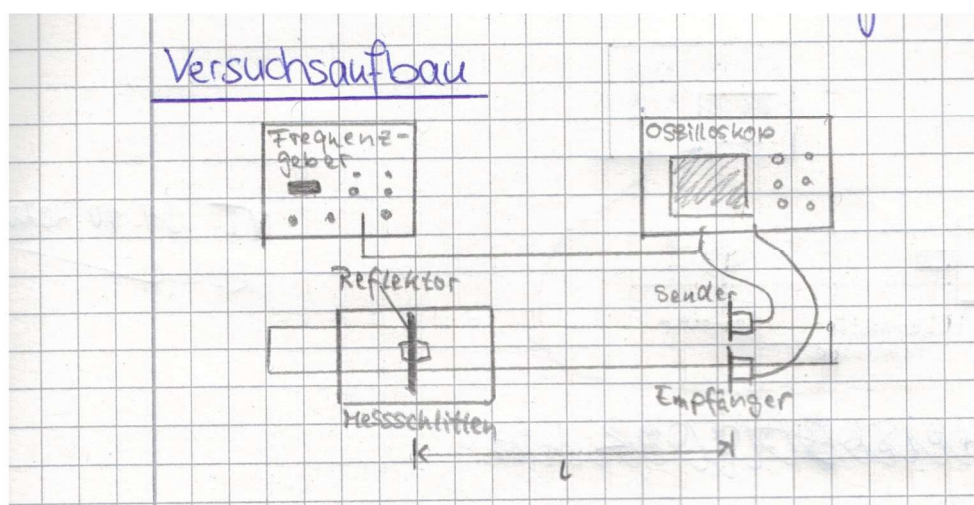


Abb. 2.2: Versuchsaufbau 2: Ultraschall, Messung der Laufzeit

Der Aufbau für den zweiten Versuchsteil ist in Abbildung 2.2 skizziert. Auch hier werden wieder ein Ultraschallsender und -empfänger verwendet. Dieses Mal sind der Sender und Empfänger

jedoch nebeneinander fest auf der optischen Bank montiert, sodass ihre Vorderflächen eine Ebene bilden, und ihnen im Abstand l parallel gegenüber auf dem verschiebbaren Schlitten befindet sich ein Reflektor.

Der Sender wird ebenfalls wieder an den Frequenzgenerator angeschlossen, sendet jedoch dieses Mal nicht dauerhaft, sondern ein gepulstes Signal mit ungefähr 40kHz. Sender und Empfänger sind ebenfalls wieder beide an das Oszilloskop angeschlossen, auf dessen Bildschirm man das gesendete und das ankommende Signal sehen und die Zeit dazwischen ablesen kann.

Achtung: der Puls selbst wird jedoch nicht mit einer Frequenz von 40kHz ausgesendet

3 Durchführung

3.1 Versuchsteil 1

Bevor man mit den Messungen beginnt, muss gegebenenfalls die Anzeige am Oszilloskop so eingestellt werden, dass die Sinusschwingungen von Sender und Empfänger denselben y -Achsenabschnitt haben und gut erkennbar sind.

Das Sender- und Empfängersignal auf dem Bildschirm des Oszilloskops haben nun zwar die selbe Frequenz, sind jedoch phasenverschoben. Deshalb verstellt man mit der Mikrometerschraube die Position des Empfängers so, dass das Empfängersignal auf dem Bildschirm des Oszilloskops deckungsgleich mit dem Sendersignal ist und notiert sich die Position x_0 des Empfängers auf dem Messschlitten.

Nun schiebt man den Empfänger mit der Mikrometerschraube aus dieser Position heraus, wobei die Signale auf dem Bildschirm des Oszilloskops sich wieder phasenverschieben. Man verschiebt den Empfänger nun so weit, bis die Signale ein weiteres Mal deckungsgleich sind, also um eine Wellenlänge. Die Position des Empfängers ist dann x_1 , welche man sich notiert.

Das Empfängersignal kann leicht durch äußere Einflüsse beeinflusst werden, sodass es beim Bestimmen der Position, bei der beide Signale deckungsgleich sind, immer zu Unsicherheiten kommt. Deshalb wird der Empfänger weitere neun Mal verschoben, sodass man Positionen x_0 bis x_{10} hat, aus denen sich die Wellenlänge des Ultraschallsignals genauer berechnen lässt.

Um später die Schallgeschwindigkeit berechnen zu können, braucht man außerdem noch die Frequenz f , mit der der Sender sendet. Diese beträgt ungefähr 40kHz, die Anzeige am Frequenzgenerator schwankt jedoch während der Messung immer, deshalb sollte man sich mehrere Werte für f notieren, aus denen später ein Mittelwert gebildet wird.

Um noch höhere Genauigkeit zu erzielen, wird die gesamte Messreihe außerdem für insgesamt fünf verschiedene Startpositionen des Schlittens auf der optischen Bank durchgeführt.

3.2 Versuchsteil 2

Im zweiten Versuchsteil muss sowohl der Aufbau (siehe [oben](#)) als auch die Anzeige des Oszilloskops geändert werden. Man stellt es so ein, dass das Sendersignal und das Empfängersignal beide auf dem Bildschirm sichtbar sind, indem man die Anzeige an der x -Achse „staucht“.

Dann notiert man sich den Abstand l des Reflektors zu Sender und Empfänger. Da man den genauen Abstand ohnehin nicht bestimmen kann, weil man nicht weiß, wo genau innerhalb von Sender und Empfänger die Schallmembranen sind, und später nur die Steigung der Ausgleichsgerade interessant ist, reicht es dabei, sich an der Skala auf der optischen Bank zu orientieren, was sehr viel genauer ist als ein Bandmaß. l entspricht also dem Abstand zwischen den Befestigungen von Sender/Empfänger und Messschlitten, und $s = 2l$ entspricht der Laufstrecke des Ultraschallsignals, die später in ein Diagramm in Abhängigkeit von der Laufzeit t eingetragen wird. ✓

Bevor man allerdings die Laufzeit t am Bildschirm des Oszilloskops abliest, sollte man noch

einmal sicherstellen, dass der Reflektor wirklich parallel zur Ebene von Sender/Empfänger steht, sonst kommt es zu Unsicherheiten in der Laufzeit.

Auf dem Bildschirm des Oszilloskops sollte nun das zusammengestauchte gepulste Sendersignal als Rechteck zu sehen sein, und in einem Abstand dazu das empfangene Signal, weil es aufgrund der Strecke, die das Signal von Sender zum Reflektor und dann wieder zurück zum Empfänger zurücklegt, natürlich zu einer Zeitverzögerung kommt. Der Abstand der Signale auf dem Bildschirm entspricht der Laufzeit t . Das Empfängersignal ist jedoch nicht rechteckförmig, da die Schallmembran des Empfängers erst anschwingen muss, bevor sie die volle Stärke des Sendersignals wiedergibt. ✓

Wie bei der Strecke ist es deshalb auch hier nicht möglich, die genaue Laufzeit zu bestimmen, und auch gar nicht notwendig, da später nur die Steigung der Ausgleichsgerade benötigt wird. Deshalb wird mittels der Cursor-Funktion des Oszilloskops der Abstand zwischen dem rechten Ende des Sendersignals und dem Maximum des Empfängersignals gemessen, da dies zwei leicht zu bestimmende Punkte sind. Die Zeit t zwischen diesen Punkten wird dann auf dem Oszilloskop angezeigt, und man kann sie sich notieren. ✓ Schön!

Diese Messung wird für zehn verschiedene l durchgeführt, dabei ist es wichtig, nur die Position des Messschlittens auf der optischen Bank zu verändern, nicht jedoch die Position des Reflektors auf dem Messschlitten. So erhält man zehn verschiedene Wertepaare (s, t) , die dann später in ein Diagramm eingetragen werden. Aus der Steigung der zugehörigen Ausgleichsgeraden lässt sich dann die Schallgeschwindigkeit bestimmen.

4 Auswertung und Fehleranalyse

4.1 Versuchsteil 1: Ultraschall, Messung der Wellenlänge

Frequenz

Hier solltet ihr überlegen, ob es sinnvoll ist, eine Std auf die Frequenz zu bestimmen
Falls die Frequenz linear stieg oder fiel ist es z.B. nicht gerechtfertigt eine statistische Normalverteilung anzunehmen
In diesem Falle wäre eine konservative Schätzung wie $s_f = (f_{\max} - f_{\min})/2$ evtl. sinnvoller

Die Frequenz, welche am Frequenzgenerator abgelesen werden konnte, schwankte während des gesamten Versuchs. Aus diesem Grund wurde die Frequenz 28 Mal abgelesen, die Werte sind im Anhang. Aus allen Werten wird nun der Mittelwert gebildet:

$$\bar{f} = \frac{1}{28} \sum_{i=1}^{28} f_i = (40,574 \pm 0,003) \text{ kHz} . \quad (4.1)$$

Die empirische Standardabweichung berechnet sich mit der Formel

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{28-1} \cdot \sum_{i=1}^{28} (f_i - \bar{f})^2} = 0,015 \text{ kHz} \quad (4.2)$$

und die Standardabweichung des Mittelwertes mit

$$s_{\bar{f}} = \frac{s_f}{\sqrt{28}} = 0,003 \text{ kHz} . \quad (4.3)$$

Relative Schlittenpositionen und Wellenlänge

Die relativen Schlittenpositionen, welche später in den Grafiken aufgetragen werden, berechnen sich aus den Startpositionen x_0 und ihrer Position x_k mit

$$x_{\text{rel},k} = |x_0 - x_k| . \quad (4.4)$$

Die berechneten relativen Schlittenpositionen $x_{\text{rel},k}$ und die gemessenen Schlittenpositionen x_k der 5 Messungen sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Messung 1		
k	x in mm	x_{rel} in mm
0	152,61	0
1	144,01	8,6
2	135,50	17,11
3	127,10	25,51
4	118,49	34,12
5	109,93	42,68
6	101,53	51,08
7	93,07	59,54
8	84,78	67,83
9	76,32	76,29
10	67,74	84,87

Messung 2		
k	x in mm	x_{rel} in mm
0	67,38	0
1	75,51	8,13
2	83,88	16,5
3	92,39	25,01
4	101,18	33,8
5	109,75	42,37
6	118,35	50,97
7	124,93	57,55
8	135,26	67,88
9	143,68	76,3
10	152,43	85,05

Messung 3		
k	x in mm	x_{rel} in mm
0	143,32	0
1	134,51	8,81
2	125,99	17,33
3	117,33	25,99
4	108,90	34,42
5	100,59	42,73
6	92,00	51,32
7	83,46	59,86
8	74,97	68,35
9	66,57	76,75
10	58,19	85,13

Messung 4		
k	x in mm	x_{rel} in mm
0	47,77	0
1	56,40	8,63
2	64,85	17,08
3	73,37	25,60
4	81,85	34,08
5	90,46	42,69
6	98,46	50,69
7	107,46	59,69
8	116,04	68,27
9	124,63	76,86
10	133,08	85,31

Messung 5		
k	x in mm	x_{rel} in mm
0	128,61	0
1	119,51	9,10
2	111,21	17,40
3	102,87	25,74
4	94,12	34,49
5	85,86	42,75
6	77,15	51,46
7	68,6	60,01
8	60,28	68,33
9	51,76	76,85
10	43,42	85,19

Tab. 4.1: Versuchsteil 1: Messwerte und relative Schlittenposition

In [Anhang 3](#) sind für jede Messung die x_{rel} gegenüber k aufgetragen. Außerdem wurden die Ausgleichsgeraden eingezeichnet und grafisch mittels eines Steigungsdreiecks deren Steigung β bestimmt, deren Betrag der Wellenlänge entspricht. In Tabelle 4.2 sind die Werte für die Steigungen nochmals aufgelistet.

Messung	Steigung β in mm
1	8,475
2	8,494
3	8,501
4	8,526
5	8,502
Mittelwert $\bar{\beta}$	8,500
s_{β}	0,018
$s_{\bar{\beta}}$	0,008

Tab. 4.2: Steigungen der Ausgleichsgeraden für die Messungen 1 bis 5

Der Mittelwert $\bar{\beta}$ wurde mit der Formel

$$\beta = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \beta_i \quad (4.5)$$

berechnet, die empirische Standardabweichung s_{β} mit

$$s_{\beta} = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (\beta_i - \bar{\beta})^2}, \quad (4.6)$$

woraus sich die Standardabweichung des Mittelwerts

$$s_{\bar{\beta}} = \frac{s_{\beta}}{\sqrt{5}} \quad (4.7)$$

ergibt.

Die Wellenlänge des Ultraschallsignals ist also

$$\lambda = (8,500 \pm 0,008)\text{mm} . \quad (4.8)$$

Schallgeschwindigkeit

Für die Geschwindigkeit einer Welle gilt

$$c = \lambda \cdot f , \quad (4.9)$$

wobei λ die Wellenlänge und f die Frequenz ist.

Für Versuchsteil 1 ergibt sich also mit $\lambda = (8,500 \pm 0,008)\text{mm}$ und $f = (40,574 \pm 0,003)\text{kHz}$ als Schallgeschwindigkeit

$$c_1 = (344,9 \pm 0,3) \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (4.10)$$

Die Unsicherheit wurde dabei mit einem Spezialfall der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta c_1 = c_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (4.11)$$

4.2 Versuchsteil 2: Ultraschall, Messung der Laufzeit

In Tabelle 4.3 sind die gemessenen Werte für die Laufzeit t , den Abstand l und die daraus resultierende Laufstrecke s aufgelistet.

Messung	l in cm	$s=2l$ in cm	t in ms
1	54,7	109,4	3,14
2	62,6	125,2	3,62
3	64,6	129,2	3,74
4	68,6	137,2	3,96
5	70,6	141,2	4,08
6	52,6	105,2	3,06
7	42,1	84,2	2,44
8	37,1	74,2	2,16
9	34,6	69,2	2,00
10	73,1	146,2	4,22

Tab. 4.3: Versuchsteil 2: Messwerte für Laufzeit und Strecke

Die Fehler für l und t ergeben sich aus der Messgenauigkeit, dabei ist $\Delta l = \pm 0,1\text{cm}$ und $\Delta t = \pm 0,02\text{ms}$.

Da sowohl die Zeit als auch die Strecke jeweils nur bis auf eine additive Konstante bestimmen ließen, wird die Strecke in Abhängigkeit von der Zeit in ein Diagramm aufgetragen, siehe Abb. 4.1. Die Schallgeschwindigkeit entspricht dann der Steigung der Ausgleichsgeraden, welche sich auch durch die Offsets nicht ändert.

Die Fehlerbalken sind in Abb. 4.1 sowohl für t als auch für s vorhanden, jedoch nicht erkennbar, weil sie zu klein sind.

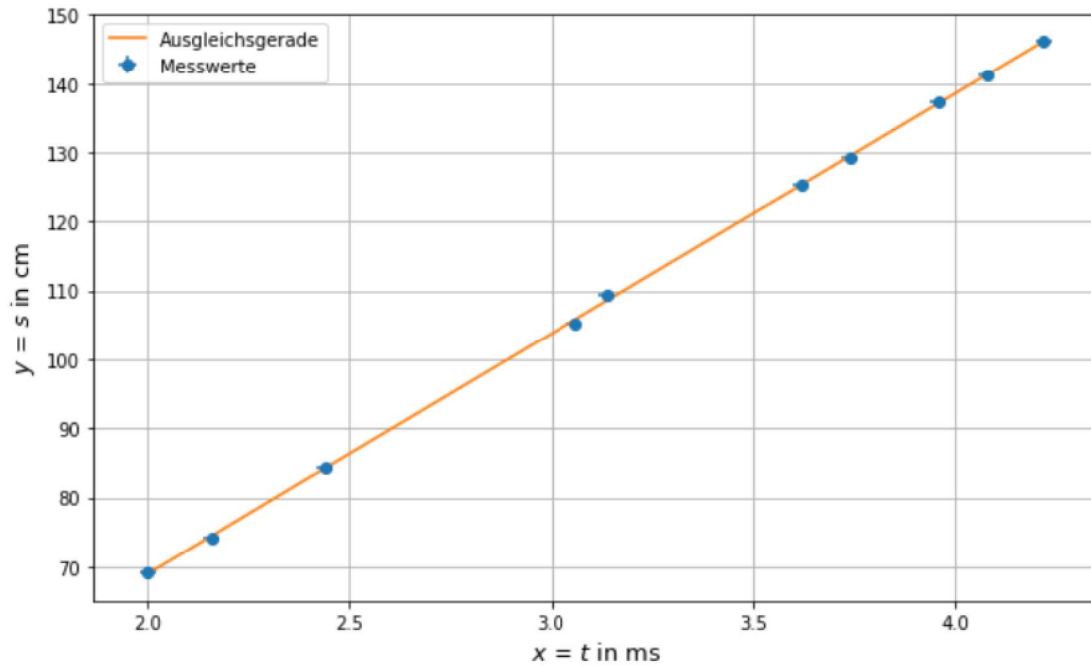


Abb. 4.1: Zusammenhang zwischen Laufzeit und Strecke der Ultraschallwellen

Die Ausgleichsgerade wurde analytisch durch lineare Regression mit Hilfe einer Excel-Tabelle berechnet. Die Ergebnisse sind ungerundet in [Anhang 4](#) zu erkennen. Für die Ausgleichsgerade $y = a + bx$ gilt somit

$$a = (-0,6 \pm 0,5) \text{ cm} \quad \text{und} \quad b = (34,77 \pm 0,16) \frac{\text{cm}}{\text{ms}}. \quad (4.12)$$

Für die Steigung gilt $b = \frac{s}{t}$, also entspricht sie der Schallgeschwindigkeit des Ultraschallsignals. Die Schallgeschwindigkeit aus Versuchsteil 2 ist damit also

$$c_2 = (347,7 \pm 1,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4.13)$$

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Schallgeschwindigkeit

Im Versuch wurde auf zwei verschiedene Arten die Schallgeschwindigkeit eines Ultraschallsignals bestimmt.

In Versuchsteil 1 ergab sich durch Messen der Wellenlänge und der Frequenz

$$c_1 = (344,9 \pm 0,3) \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (5.1)$$

In Versuchsteil 2 wurden dagegen Laufzeit und Strecke des Signals gemessen, woraus sich

$$c_2 = (347,7 \pm 1,6) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.2)$$

ergab.

Überprüft man die Verträglichkeit dieser Werte mit der Formel

$$t = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{(\Delta c_1)^2 + (\Delta c_2)^2}}$$

$t < 2$: c_1 und c_2 sind verträglich
 $t > 2$: c_1 und c_2 sind nicht verträglich

ergibt sich $t = 1,72 < 2$, also sind die Ergebnisse miteinander verträglich.

Die Temperatur während des Versuchs betrug weitestgehend konstant 23°C. Der Literaturwert für die Schallgeschwindigkeit in Luft bei 23°C ist $c_{\text{Lit}} = 345,174 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [Quelle 1], was in einer 1σ -Umgebung von c_1 und in einer 2σ -Umgebung von c_2 liegt, obwohl c_2 eine größere statistische Unsicherheit hat. ✓

Es sind also sowohl die Ergebnisse der beiden Methoden miteinander als auch jeweils mit dem Literaturwert verträglich. Bei der zweiten Messmethode ergibt sich allerdings eine größere Unsicherheit als bei der ersten. Es scheinen jedoch beide Methoden gut geeignet, um die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen. ✓

5.2 Fehlerquellen

Da der Versuchsaufbau für beide Versuchsteile relativ simpel ist, gibt es nur wenige Fehlerquellen.

Die Hauptfehlerquelle beim ersten Versuchsteil ist die Anzeige auf dem Oszilloskop. Da das Empfängersignal sehr leicht von äußeren Einflüssen gestört wird, ist es schwer, die Position des Empfängers mit der Mikrometerschraube genau so einzustellen, dass die Signale auf dem Bildschirm deckungsgleich sind, denn die Kurve verschiebt sich während der Messung immer ein bisschen. Das führt zu Unsicherheiten in der Messung der Wellenlänge und damit auch in der Schallgeschwindigkeit, und lässt sich leider nie ganz vermeiden.

Vermutlich hing das Verschieben der Kurve vorrangig an der schwankenden Frequenz. Bei konstanten c führt dies zu einer schwankenden Wellenlänge und somit veränderten Phasenbeziehung am Ort x . Auch beim zweiten Versuchsteil führt die Anzeige auf dem Oszilloskop zu Fehlern. Mit der Cursor-Funktion lässt sich zwar das rechte Ende des Sendersignals relativ genau auswählen, das

Maximum des Empfängersignals schwankt jedoch immer leicht, sodass es schwer ist, dieses genau zu bestimmen und auszuwählen, was zu Unsicherheiten in der Laufzeit t führt.

Zu Unsicherheiten in der Strecke s in Versuchsteil 2 führt außerdem die Tatsache, dass Sender und Empfänger sich nicht am selben Ort, sondern in einem Abstand voneinander befinden. Selbst wenn der Reflektor also exakt parallel zur Sender-Empfänger-Ebene ausgerichtet ist, entspricht die vom Signal zurückgelegte Strecke s nicht dem Doppelten des Abstands von Sender/Empfänger zum Reflektor, sondern ist ein wenig länger.

Mit dem Satz des Pythagoras und dem Abstand zwischen Sender und Empfänger ließe sich die vom Signal zurückgelegte Strecke genauer bestimmen. Da für alle Messungen der Abstand zwischen Sender und Empfänger jedoch viel kleiner war als der Abstand zwischen Sender/Empfänger und Reflektor, wurde dies in der Auswertung vernachlässigt.

Sehr gute Idee! In der Tat könnte die zu große Steigung für diese Theorie sprechen, da so geringe Abstände stärker unterschätzt werden als größere Abstände und somit die Steigung der Ausgleichsgeraden größer ist. Außerdem wird das Ultraschallsignal nicht nur vom Reflektor, sondern auch von anderen Dingen in der Nähe des Versuchsaufbaus reflektiert, was zu Störsignalen auf der Anzeige des Oszilloskops führt. Diese lassen sich auch nicht vollständig vermeiden, werden jedoch erheblich verringert, wenn man den Versuchsaufbau so richtet, dass der Sender von der Wand wegstrahlt.

Fazit:

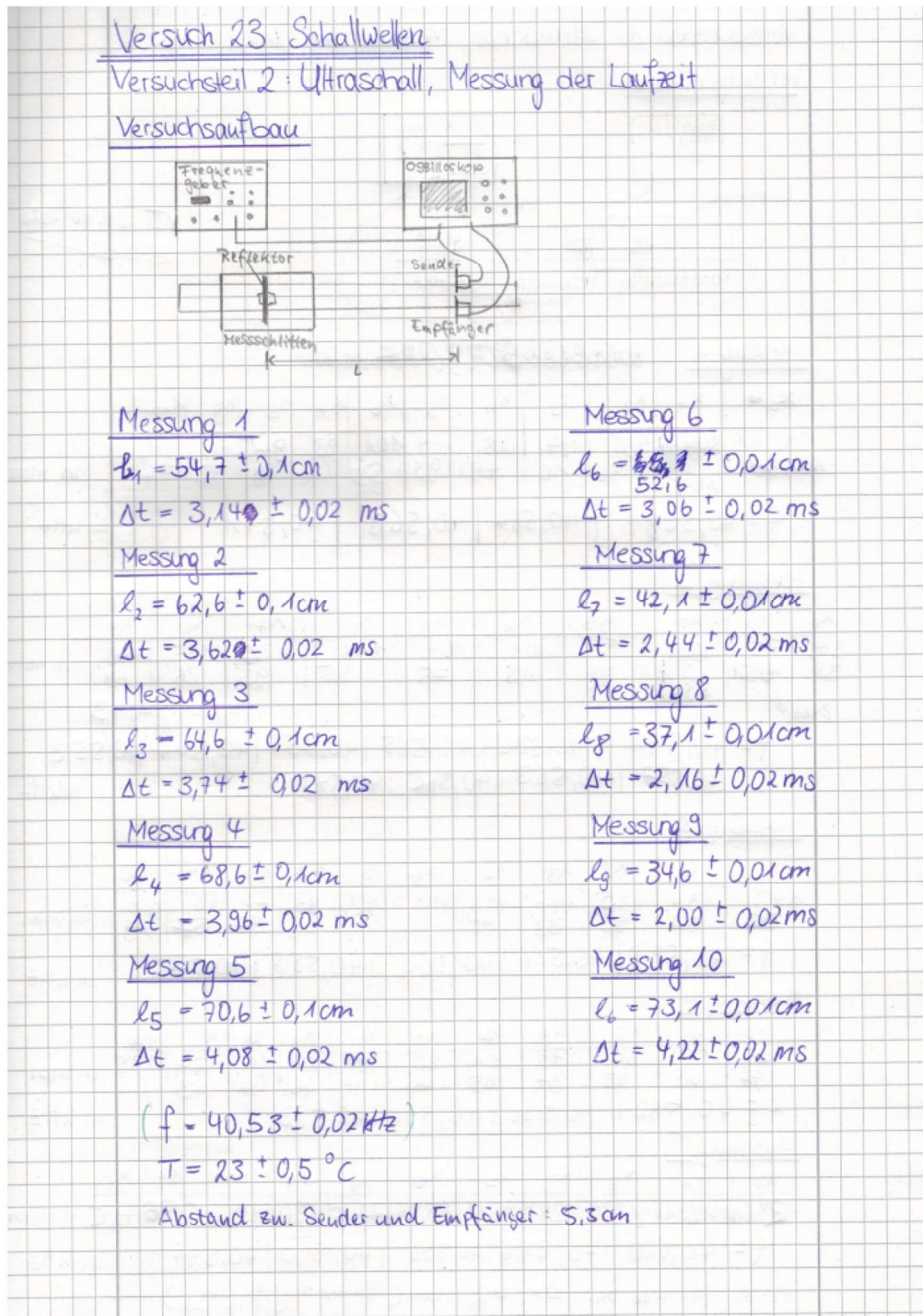
Ein wirklich gelungenes Protokoll, an dem ich nichts zu beanstanden habe!
Es liest sich sehr rund, ist sehr übersichtlich gestaltet und vollständig. Darüber hinaus finde ich auch eure Fehlerdiskussion sehr gelungen.
Macht weiter so!

Note: 1,0

6 Literaturverzeichnis

[Quelle 1] <http://www.sengpielaudio.com/Rechner-schallgeschw.htm> , 03.10.2020

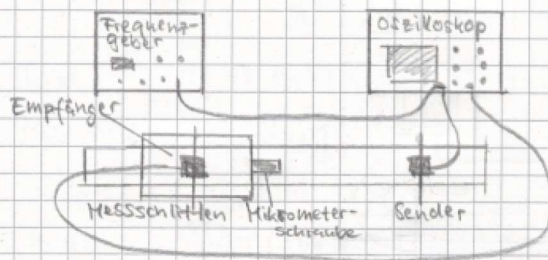
7 Anhang



Anhang 1: Rohdaten, Teil 1

Versuchsteil 1: Ultraschall, Messung der Wellenlänge

Versuchsaufbau



Messung 1

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
152,61 152,73	144,01 144,01	135,50	127,10	118,49	109,93	101,53	93,07	84,78	76,32	67,74	in mm
$f = 40,5681 \quad \quad 40,564 \quad \quad 40,568 \quad \quad 40,571$											in kHz

Messung 2

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
67,38 67,38	75,51 83,88	83,88 83,88	92,39	101,18	109,75	118,35	127,93	135,26	143,68	in mm
$f = 40,591 \quad \quad 40,580 \quad \quad 40,565 \quad \quad 40,555 \quad \quad 40,544 \quad \quad 40,552$										in kHz
40,557 $ $ 40,563 $ $ 40,566 $ $ 40,570										

Messung 3

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
143,32	134,51	125,99	117,33	108,90	100,59	92,00	83,46	74,97	66,57	58,19	in mm
$f = 40,593 \quad \quad 40,566 \quad \quad 40,560 \quad \quad 40,558 \quad \quad 40,572$											in kHz

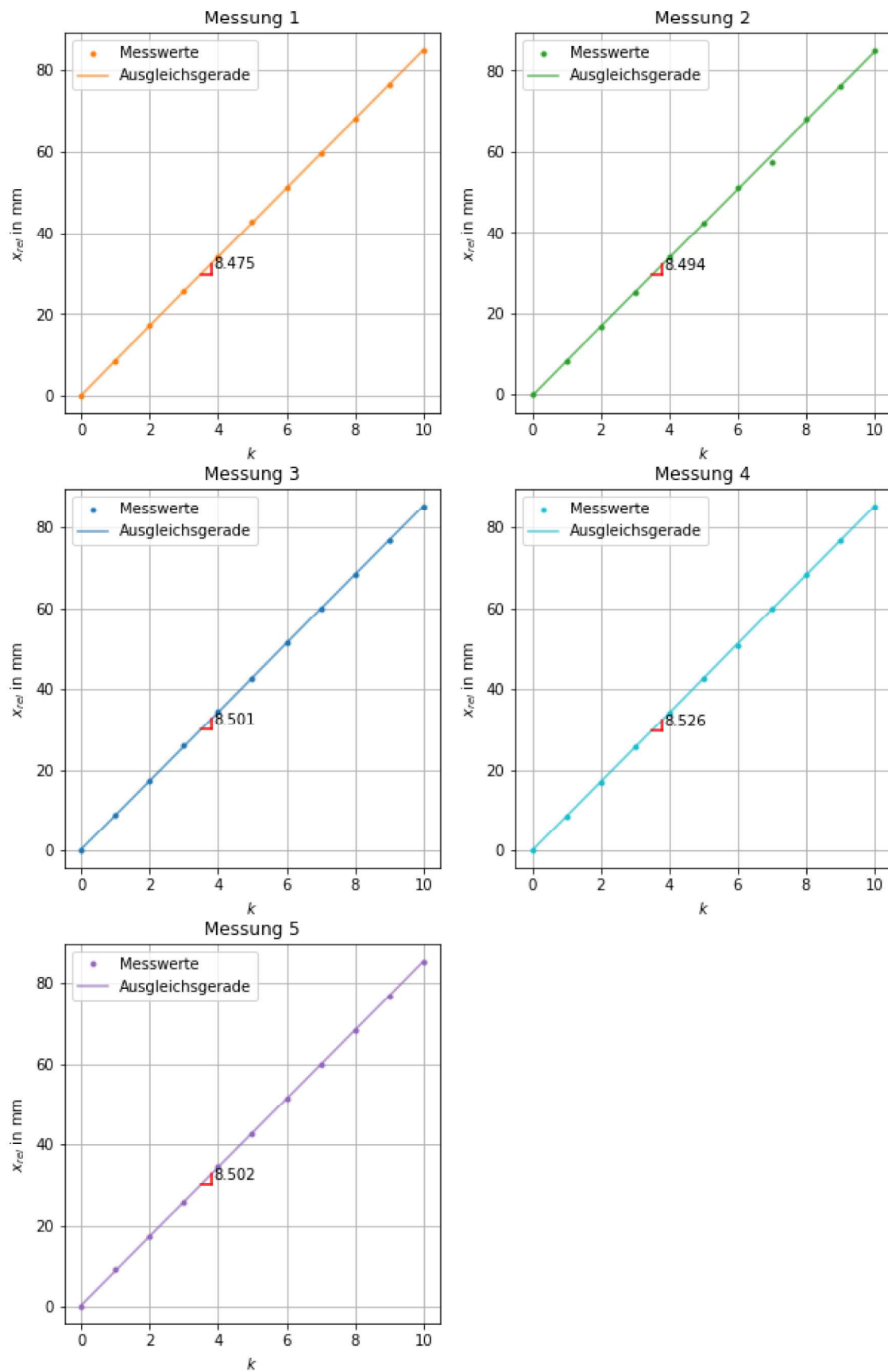
Messung 4

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
47,77	56,40	64,85	73,37	81,85	90,46	99,89	107,46	116,04	124,63	133,08	in mm
$f = 40,582 \quad \quad 40,586 \quad \quad 40,590 \quad \quad 40,593$											in kHz

Messung 5

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
128,61	119,51	111,21	102,87	94,12	85,86	77,15	68,60	60,28	51,76	43,42	in mm
$f = 40,600 \quad \quad 40,586 \quad \quad 40,588 \quad \quad 40,590 \quad \quad 40,594$											in kHz

Fehler für alle x_i : $\Delta x_i = 0,1 \text{ mm}$ (Schwankungen am Oszilloskop)



Anhang 3: Versuchsteil 1: Relative Schlittenpositionen für k , mit Ausgleichsgeraden und Steigungsdreiecken

Excel-Auswertung der analytischen Berechnung der Steigung der Ausgleichsgeraden

x	y	x^2	xy	$(y-a_0-b_0x_i)^2$
3,14	109,4	9,8596	343,516	0,68353551
3,62	125,2	13,1044	453,224	0,00408103
3,74	129,2	13,9876	483,208	0,05595316
3,96	137,2	15,6816	543,312	0,0128997
4,08	141,2	16,6464	576,096	0,00349097
3,06	105,2	9,3636	321,912	0,34982939
2,44	84,2	5,9536	205,448	0,0010702
2,16	74,2	4,6656	160,272	0,08791484
2,00	69,2	4	138,4	0,07131248
4,22	146,2	17,8084	616,964	0,00530141

Top!

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 32,42$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 111,0708$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 1121,2$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 3842,352$$

$$a_1 := \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \sum_{i=1}^{10} y_i - \sum_{i=1}^{10} x_i \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = -36,47088$$

$$a_2 := 10 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2 = 59,6516$$

$$a_0 = a_1/a_2 = -0,61139819$$

$$b_1 := 10 \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \sum_{i=1}^{10} x_i \sum_{i=1}^{10} y_i = 2074,216$$

$$b_2 := 10 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2 = 59,6516$$

$$b_0 = b_1/b_2 = 34,7721771$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + b_0 x_i)]^2} = 0,39927883$$

$$\Delta a = s \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} = 0,54483524$$

$$\Delta b = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} = 0,16348023$$

Anhang 4: Versuchsteil 2: Auswertung - Berechnung der Ausgleichsgeraden