

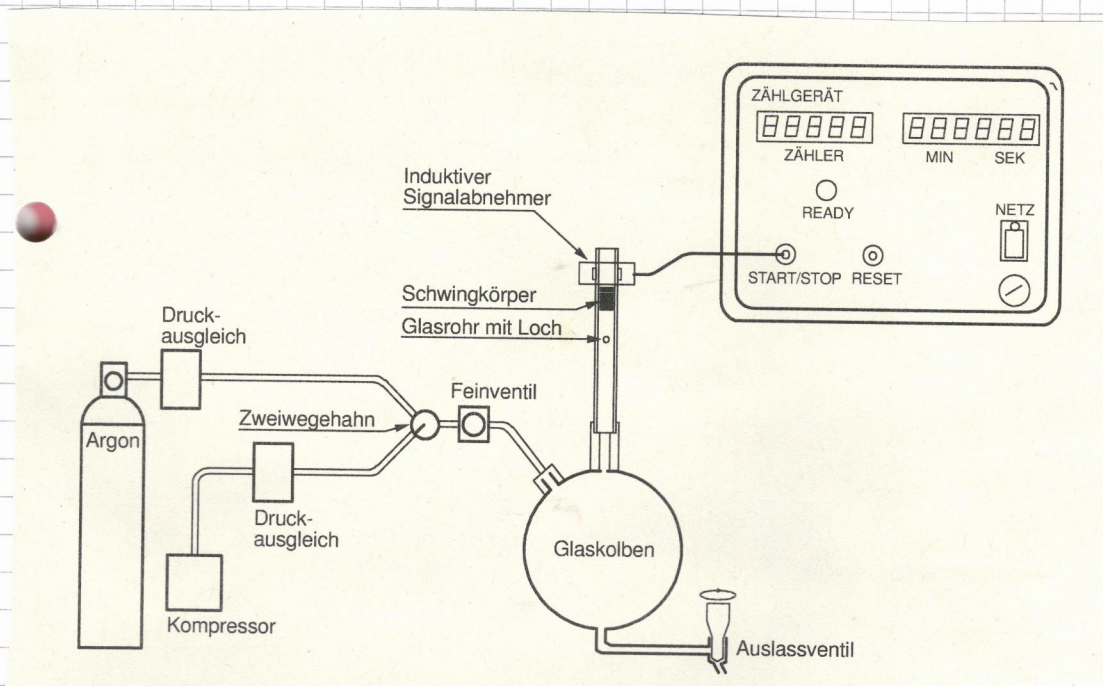
Bestimmung von c_p/c_v aus der adiabatischen Kompressibilität eines Gases (Versuch 36)

1. Einleitung

1.1. Ziel des Versuchs

Bestimmung des Adiabaten-Exponenten κ durch die Schwingungsdauer des Schwingkörpers beim Rüchard-Flammerfeld-Aufbau für Luft und Argon. + bestätigen der Theorie

1.2. Versuchsaufbau und Durchführung



(✓)

Dazu hätte man mehr schreiben können.

Über einen Zweigweghahn wird ^{jet} zuerst Luft in den Glaskolben geleitet. Nach 1min durchspülen wurde das Auslassventil geschlossen. Dadurch fängt der Schwingkörper an zu oszillieren. Ein induktiver Signalabnehmer wird am Glasrohr am oberen Ende der Schwingung des Schwingkörpers befestigt, sodass die Impulse an ein Zählgerät weitergesendet werden. Zu Messen sind bei 6 Messungen 500 Schwingungen. Anschließend spült man den Glaskolben 5min mit Argon durch und misst genau wie bei Luft die Schwingungsdauern.

1.3 Physikalische Grundlagen

Die Temperatur ist durch

$$T = \frac{1}{k_B} \frac{2}{3} \frac{m}{2} \bar{v}^2 \quad (1)$$

definiert. Da man die mittlere Geschwindigkeit der Atome nicht berechnen kann, rechnen wir mit der Gasgleichung:

$$p \cdot V = N_A \cdot k_B \cdot T \cdot \nu \quad (2)$$

Dabei kann $N_A \cdot k_B$ auch als R geschrieben werden. N_A ist die Avogadro-Konstante, k_B die Boltzmann-Konstante, ν die Stoffmenge, p der Druck, V das Volumen und T die Temperatur. Aus (1) und (2) folgt, dass pV proportional zu $\frac{m}{2} \bar{v}^2$ ist.

Die innere Energie eines Gases wird durch

$$U = \nu f N_A \frac{k_B T}{2} = \frac{1}{2} \nu f R T \quad (3)$$

beschrieben. Dabei gibt $\frac{f}{2}$ die Energie an. Der Gleichverteilungssatz macht eine Aussage über die Verteilung der Gesamtenergie eines Systems auf seine Freiheitsgrade. Daraus folgt, für unsere Energie, dass für einatomige ideale Gase die molare f gibt die Freiheitsgrade an. Für die molare Wärmekapazität gilt bei konst. Volumen gilt:

$$\Delta Q = c_V \nu \Delta T \quad (4)$$

Nach dem Gleichverteilungssatz wird ΔQ mit ΔU gleichgesetzt wodurch sich die molare Wärmekapazität berechnen lässt:

$$\Delta U = \Delta Q$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \nu f R \Delta T = c_V \nu \Delta T$$

$$\Rightarrow c_V = \frac{1}{2} f R \quad (5)$$

Nach dem Dulong-Petit'schen Gesetz gilt für Festkörper die spezifische Wärmekapazität

$$c_{V, \text{fest}} = 3R = \frac{1}{2} f R \quad (6)$$

Außerdem betragen nach dem Dulong-Petit'schen Gesetz die Anzahl der Freiheitsgrade im Festkörper 6, da die 3 Vibrationsfreiheitsgrade doppelt genommen werden.

Es gibt vier verschiedene Prozesse:

- isotherm, dabei ist die Temperatur konstant
- isochor, dabei ist das Volumen konstant
- isobar, dabei ist der Druck konstant
- adiabatische, dabei ~~es~~ gibt es keine Wärmeänderung $\Delta Q = \text{konst}$

In unserem Versuch geht es um adiabatische Prozesse.
Für die spezifische Wärmekapazität c gilt

$$c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (7)$$

Nach dem ersten Hauptsatz ist die Änderung der inneren Energie die Summe der Änderung der Arbeit mit der Änderung der Wärme. Somit lautet die Gleichung dafür

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (8)$$

Hieraus kann man nun c_p bestimmen mit Gleichung (4), (5), (2).
 ν wird dabei zu 1 gesetzt. Die Änderung der ~~Arbeit~~ ist gleich dem Druck mal der Änderung des Volumens.

$$\Delta W = p \Delta V \quad (9)$$

$$dU = dQ + dW \quad \text{mit (9) und (4) folgt}$$

$$\Rightarrow dU = c_v dT + p dV \quad (10)$$

Mit Gleichung (2) folgt für $p dV$:

$$dU = c_v dT + R dT$$

$$\Leftrightarrow dU = (c_v + R) dT \quad \text{mit (5):}$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dT} = c_p = \frac{1}{2} f R + R = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R \quad (11) \quad \checkmark$$

Daraus folgt für den Adiabaten Exponenten κ mit (5):

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{f}{2} + 1\right) R}{\frac{1}{2} f R} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f+2}{f} \quad (12) \quad \checkmark$$

Die Freiheitsgrade von Atomen beschreiben die Bewegung die durch Aufnahme von Energie möglich ist. Die Bewegungen sind in der Form von Translation, Rotation oder Vibration.

Die Freiheitsgrade von einem Atom entsprechen den 3 Translationsbewegung. Ein zweiatomiges Teilchen besitzt die 3 Freiheitsgrade der Translation 2 der Rotation und 2 der Vibration. Bei Raumtemperatur ist die Energie die für die Vibration benötigt wird jedoch zu klein, wodurch es nur 5 Freiheitsgrade hat die effektiv sind.

Da es in unserem Versuch ein adiabatischer Prozess ist gilt $dQ=0$.
Man können wir mithilfe des 1. Hauptsatzes die Poisson-Gleichung herleiten:

$$dU = dQ + dW$$

$$\Rightarrow dU = dW$$

$$\Rightarrow c_v dT = p dV \quad \text{mit (1):}$$

$$\Leftrightarrow c_v dT = \frac{RT}{V} dV$$

$$\Leftrightarrow c_v \frac{dT}{T} = \frac{R}{V} dV$$

$$\Rightarrow c_v \ln(T) = -R \ln(V) + \text{konstante}$$

$$\Rightarrow \ln(T^{c_v} \cdot V^R) = \text{konstante} \quad \text{mit } R = c_p - c_v$$

$$\Rightarrow \ln(T^{c_v} \cdot V^{c_p - c_v}) = \text{konstante}$$

$$\Rightarrow T^{c_v} \cdot V^{c_p - c_v} = \text{konstante}$$

$$\Rightarrow T \cdot V^{\frac{c_p}{c_v} - 1} = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow T \cdot V^{\kappa - 1} = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow p \cdot V^{\kappa} = \text{konstant} \quad \checkmark \quad (13)$$

Am Anfang befindet sich der Schwingkörper im statischen Gleichgewicht. Dazu wird der äußere Luftdruck (p_a) dem Schweredruck (p_s) gleichgestellt. Wird er aus der Ruhelage um dx ausgelenkt, so beträgt die Änderung des Volumens im Gaskolben zu

$$dV = q \cdot dx \quad (14)$$

mit q als Querschnittsfläche. Nach der Zustandsgleichung ändert sich durch die Temperaturänderung Volumenänderung auch die Temperatur und der Druck des Gases.

Durch Ableiten des Poissonschen Gesetz ergibt sich:

$$V^{\kappa} dp + p \kappa dV \cdot V^{\kappa - 1} = 0 \quad (15)$$

Bei der Bewegung des Körpers nach unten ändert sich der Druck und das Volumen im Gaskolben. Am Gas wird dadurch Arbeit verrichtet, die wegen $dQ=0$ komplett in innere Energie umgewandelt wird, wodurch eine Kraft entsteht die rücktreibend, also nach oben, wirkt. In der anderen Richtung entsteht ein Unterdruck nach dem gleichen Prinzip.

$$dF = q \cdot dp$$

$$\Rightarrow dp = \frac{dF}{q} \quad \checkmark$$

(16)

Aus dem Kräftegleichgewicht von $F_R = -Dx$ und $F = m \cdot \ddot{x}$ ergibt sich:

$$m\ddot{x} + Dx = 0 \quad (17)$$

wobei $D = -\frac{dF}{dx}$ (18) ✓

Dafür ist die Lösung eine harmonische Schwingung mit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (19)$$

Durch einsetzen von (14) und (16) in (15) ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{KdF}{q}} + p \cdot K \cdot q \cdot dx \cdot v^{H-1} = 0 \quad (20)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{dF}{q}} + p \cdot K \cdot q \cdot dx \cdot v = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = - \frac{p \cdot K q^2}{\sqrt{v}} \quad (21)$$

einsetzen in (18) ergibt

$$D = \frac{p K q^2}{\sqrt{v}} \quad (22)$$

Dies in (19) eingesetzt ergibt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \sqrt{v}}{p K q^2}} \quad (23)$$

$$\Rightarrow K = 4\pi^2 \frac{m \sqrt{v}}{p T^2 q^2} \quad (24) \quad \checkmark$$

wobei $p = p_A + p_S$ (25)

$$p_S = \frac{mg}{q} \quad (26) \quad \checkmark$$

Auftretende Reibungskräfte am Glasrohr werden durch ein kleines Loch im Glasrohr kompensiert. Der auftretende Zusatzdruck stellt nur eine ^{sehr} kleine Korrektur zum Gesamtdruck dar, wodurch mit einem harmonischen ungedämpften Oszillator gerechnet werden kann. Der Schwingkörper schwingt durch Druck aus dem Glasrohr. Sobald er über dem Loch ist, sinkt der Druck aufgrund eines Ausgleichs mit der Umgebung und der Körper fällt wieder nach unten. Das beschreibt näherungsweise einen harmonischen Oszillator. ✓

1. Parameter

Fehler auf Zählung: $s_z = \sqrt{n}$
 (rel. Fehler $\frac{1}{s_z} = \frac{1}{\sqrt{n}}$)

$T_{\text{Raum}_A} = 25^\circ\text{C}$

Zeitfehler $s_t = 0,2\text{s}$

$p_A = 986\text{ mbar}$

Fehler auf T: $s_T = \frac{T}{\sqrt{N}}$

Gewicht Schwingkörper: $m_s = (5,84 \pm 0,01)\text{g}$

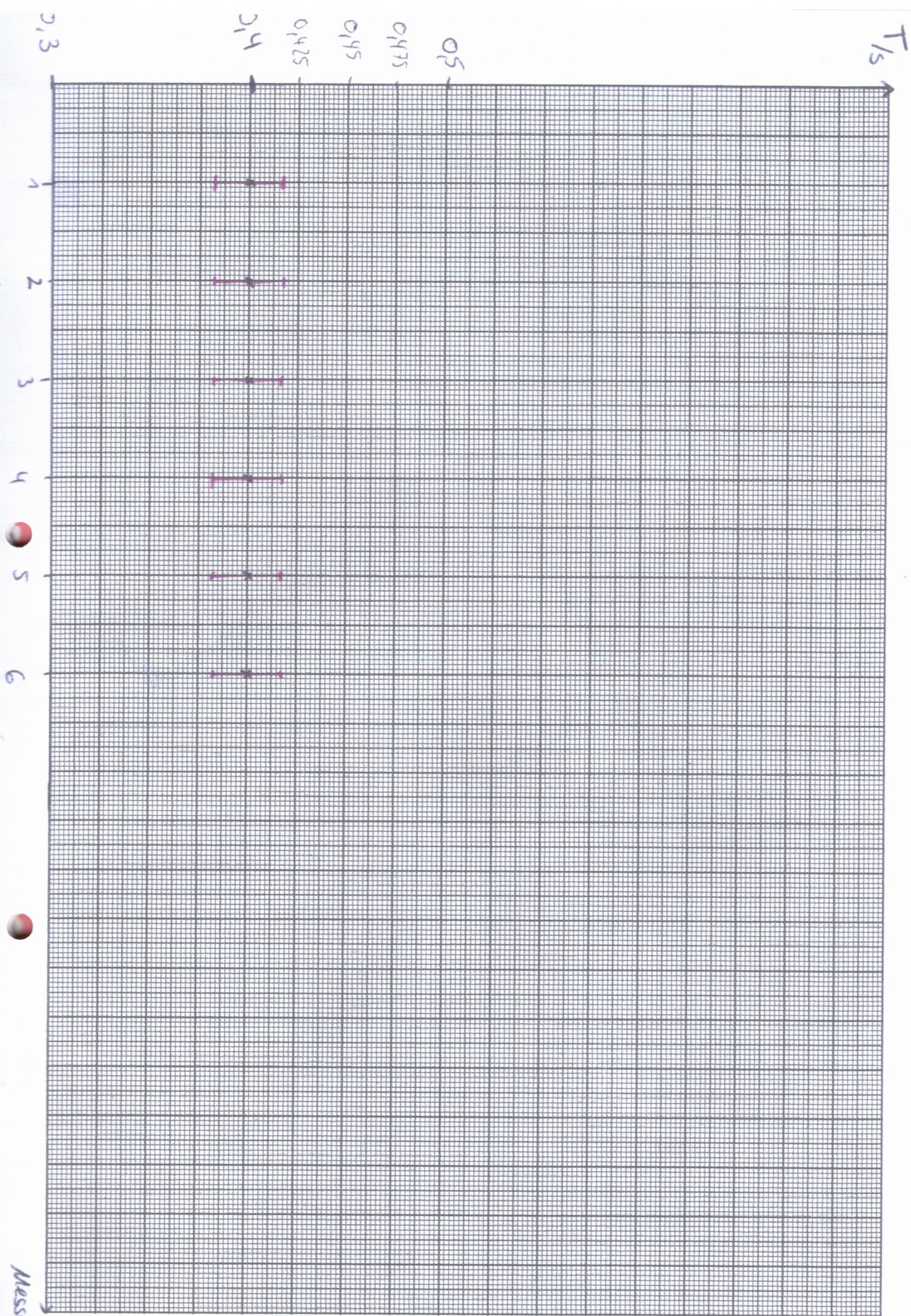
2. Wertetabellen Luft

Messung	n	500 T/s	1 T/s	Fehler
1	500	200,48	0,4009	0,0179
2	504	201,94	0,4007	0,0178
3	500	200,36	0,4007	0,0179
4	500	200,71	0,4014	0,0180
5	500	200,82	0,4016	0,0180
6	499	200,52	0,4018	0,0180

Messung	n	Argon n/T/s	1 T/s	Fehler	$T_{\text{Raum}_C} = 26,5^\circ\text{C}$
1	500	189,17	0,3783	0,0169	
2	500	186,60	0,3732	0,0167	
3	500	185,66	0,3713	0,0166	
4	500	185,40	0,3708	0,0166	
5	500	185,31	0,3706	0,0166	
6	500	185,32	0,3706	0,0166	



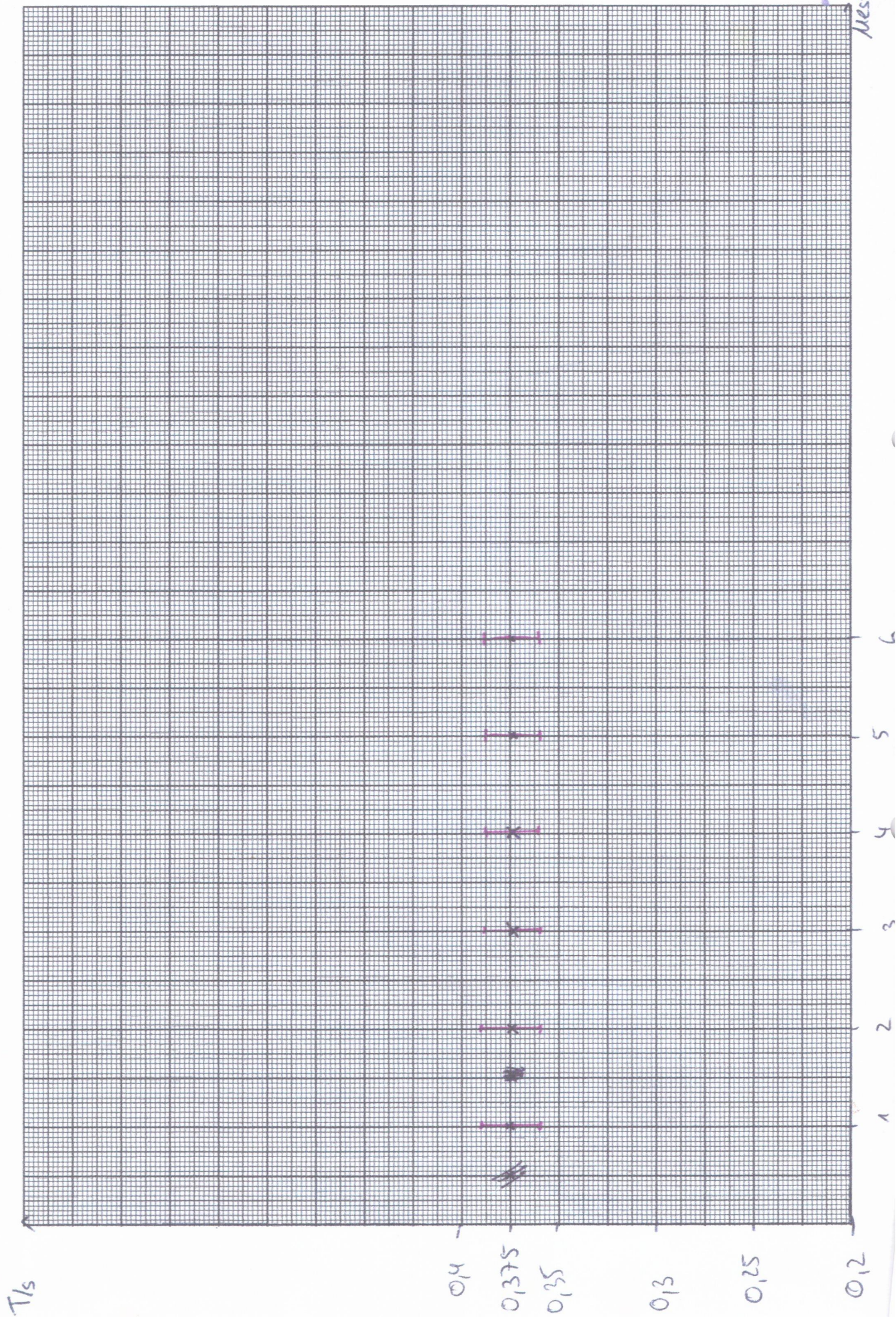
Messung mit Luft, Schwingungsdauer



Messungen

VT 16.09.16 *de*

Messung mit Argon, Schwingungsdauer



3. AUSWERTUNG

genauere Diagramme siehe Anhang

3.1. LUFT

$$m_s = 0,00584 \text{ kg}$$

$$p_a = 98600 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$s_{p_a} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$s_{m_s} = 0,00001 \text{ kg}$$

Luftdruck am Barometer abgelesen

Ablesefehler

$$g = 9,809 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$q = (0,0001533 \pm 3 \cdot 10^{-7}) \text{ m}^2$$

Querschnittsfläche des Schwingkörpers*

$$\text{Glaskolbenvolumen: } V = (0,002225 \pm 0,000005) \text{ m}^3$$

3.1.1 Mittelwert der Periodendauer

- Aus den einzelnen Messungen wird die Periodendauer für eine Schwingung bestimmt

$$\bar{T} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 T_i = 0,4012 \text{ s}$$

3.1.2 Berechnung des Gesamtdruckes

Der Gesamtdruck setzt sich aus Außendruck und dem Druck durch die Gewichtskraft des Schwingkörpers zusammen.

$$p = p_a + p_g = p_a + \frac{m_s g}{q} = 98973,6762 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

3.1.3 Berechnung von K_{Luft}

Diese erfolgt durch Formel (24). Die Herleitung ist in der Einleitung zu finden.

$$K_{\text{Luft}} = 4\pi^2 \frac{m V}{p q^2 \bar{T}^2} = \underline{1,3703}$$

3.1.4 Fehlerrechnung

Über die Standardabweichung von $\bar{T}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^6 (T_i - \bar{T})^2} = 0,0005 \text{ s}$$

erhalten wir den Fehler auf $\bar{T}$

$$s_{\bar{T}} = \frac{\sigma}{\sqrt{6}} = 0,0002 \text{ s}$$

und können so $\bar{T}$ genauer bestimmen $\Rightarrow \bar{T} = (0,4012 \pm 0,0002) \text{ s}$ (✓)

* Werte aus der Versuchsanleitung

Der Fehler ist sicherlich zu klein gewählt.

Für $s_{\bar{T}}$ sollte

man $s_{\bar{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{6}}$ nehmen

Der Fehler auf p_g

$$S_{p_g} = \sqrt{\left(\frac{S_{m_s}}{m_s}\right)^2 + \left(\frac{S_g}{g}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{S_g}{g}\right)^2}_{\text{zu vernachlässigen}}}$$
$$= 0,00026$$

$m_s, p \& g$ sind
nicht unabhängig!

hilft hier den Fehler von p genauer bestimmen zu können

$$S_p = S_{p_g} + S_{p_a} = 100,0026$$

und damit auch den Gesamtfehler auf K_{Luft}

$$S_K = K \sqrt{\left(\frac{S_{m_s}}{m_s}\right)^2 + \left(\frac{S_V}{V}\right)^2 + 2 \left(\frac{S_g}{g}\right)^2 + 2 \underbrace{\left(\frac{S_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{S_p}{p}\right)^2}_{\text{zu vernachlässigen}}}$$
$$= 5,42 \cdot 10^{-3} = 0,00542$$

über den ~~man~~ ^{man} K_{Luft} genauer bestimmen kann

$$\underline{K_{\text{Luft}} = (1,370 \pm 0,005)}$$

3.1.5 Vergleich von K_{Luft} mit klassischer Theorie

Nach der in (12) hergeleiteten Formel gilt

$$K = \frac{f+2}{f} \quad (f: \text{Anzahl der Freiheitsgrade})$$

Die Luft aus ca. 80% Stickstoff und ca. 20% Sauerstoff besteht

$$\text{ist} \quad K_{\text{Luft}} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Beide sind 2-atomige Teilchen und haben somit fünf Freiheitsgrade.

3.2 ARGON

Für die meisten Berechnungen gilt nun selbiges wie in 3.1

3.2.1 Mittelwert der Periodendauer

$$\bar{T} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 T_i = 0,3725$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (T_i - \bar{T})^2} = 0,0030 \text{ s}$$

$$s_{\bar{T}} = 0,0012 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \bar{T} = (0,3725 \pm 0,0012) \text{ s}$$

✓

3.2.2 Berechnung von K_{Argon}

Wieder folgt aus (24)

$$K_{\text{Argon}} = 4\pi^2 \frac{m_s V}{p q^2 \bar{T}^2} = 1,5897$$

$$s_{K_{\text{Argon}}} = K_{\text{Argon}} \sqrt{\underbrace{\left(\frac{s_{m_s}}{m_s}\right)^2 + \left(\frac{s_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{s_p}{p}\right)^2}_{\text{zu vernachlässigen}} + 2 \left(\frac{s_q}{q}\right)^2 + 2 \left(\frac{s_{\bar{T}}}{\bar{T}}\right)^2} \quad (w)$$

$$= 9,36 \cdot 10^{-3} = 0,00936$$

$$\rightarrow \underline{K_{\text{Argon}} = (1,590 \pm 0,009)}$$

✓

Das ist falsch!
T taucht quadratisch auf

3.2.3 Vergleich von K_{Argon} mit klassischer Theorie

Argon besitzt als Einzelatom drei Freiheitsgrade, daher ist

$$K = \frac{3+2}{2} = 1,667$$

✓

4. ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION

Durch den Versuch, haben wir experimentell bestimmt, dass der Wert

$$K_{\text{Luft}} = 1,370 \pm 0,005$$

beträgt.

Der Wert, den wir über die Theorie bestimmt haben, ist allerdings

$$K_{\text{Luft}}^{\text{theo}} = 1,4$$

~~Der~~ Unser gefundener Wert weicht von diesem um etwa 6% ab, ist also nicht sehr ideal, aber noch OK. **nain, eigentlich nicht.** Mögliche Fehler könnten hier Schwingungen sein, die nicht über den kompletten Messzeitraum konsistent harmonisch waren.

Für K_{Argon} haben wir auf dieselbe Art und Weise

$$K_{\text{Argon}} = 1,590 \pm 0,005$$

als Adiabatenkoeffizienten erhalten. Der Wert den wir über die Freiheitsgrade bestimmt haben beträgt jedoch

$$K_{\text{Argon}}^{\text{theo}} = 1,667,$$

was ungefähr 6% entspricht, und ~~ist so~~ somit ist unser Wert leider nicht sehr genau.

Zusätzlich könnten die hohen Abweichungen, daher resultieren, dass das Zählgerät manuell von uns gestoppt wurde und somit, obwohl dieselbe Zahl auf dem Display angezeigt wird, nicht immer denselben Zeitpunkt der Schwingung erfasst.

Zudem entstehen Reibungsverluste des Schwingkörpers im Glasrohr und trotz langem Durchspülen des Glaskolbens kann nicht gewährleistet werden, dass keine Reste von Argon oder Luft noch im Glaskolben befindlich sind.

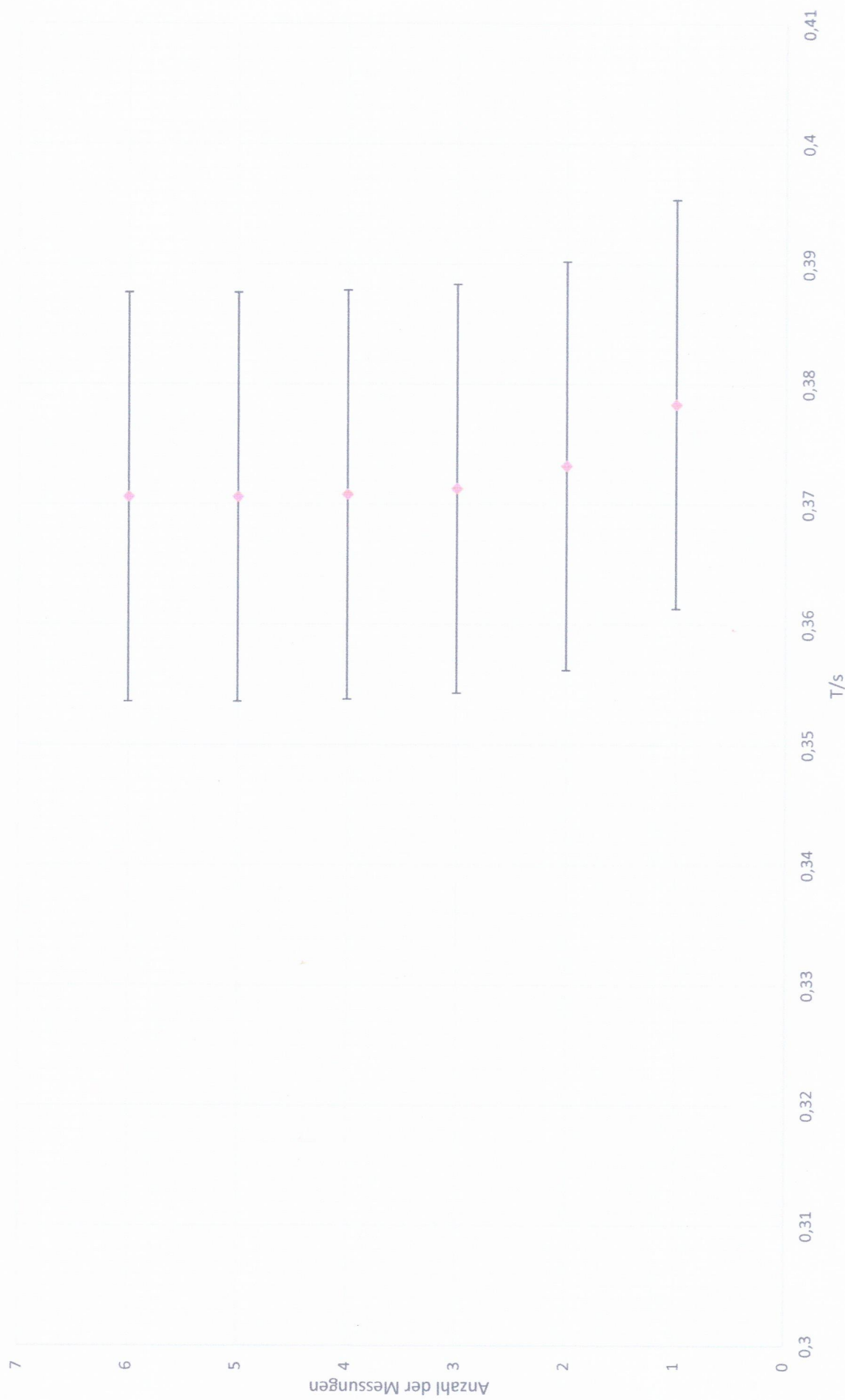
Außerdem kommt hinzu, dass zwischen Glasrohr und Schwingkörper immer etwas Gas entweichen kann.

Ebenfalls zu erwähnen ist, dass die Temperatur während des Versuchs im Raum nicht durchgängig konsistent war ($\Delta t \approx 1,5^\circ\text{C}$).

Man sollte noch diskutieren, ob die Theorie bestätigt wurde.

1,7

Schwingungsdauer des Schwingkörpers in Argon / T/s



Schwingungsdauer des Schwingkörpers in Luft / T/s

