

Versuch 24

Statistische Schwankungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Protokoll des Anfänger-Praktikums II



Gruppe 14

Durchgeführt am
12.03.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	3
2	Grundlagen	3
3	Versuchsaufbau	5
4	Versuchsdurchführung	5
5	Auswertung	6
6	Zusammenfassung und Diskussion	11
6.1	Messung 1: Messung mit mäßig hoher Zellrate	11
6.2	Messung 2: Messung mit reduzierter Zählrate	12
6.3	Messung 3: Messung mit sehr niedriger Zählrate	13
7	Literatur	14
8	Anhang	15

1 Versuchsziel

Ziel des Versuchs ist es, die Häufigkeitsverteilung der Impulse in einem Zählrohr bei einer sehr niedrigen Zählrate (Nulleffekt) sowie bei einer mäßig hohen und einer reduzierten Zählrate mit der Poisson- und Gaußverteilung zu vergleichen. Dabei wird für die Gauß- bzw. Poissonverteilung jeweils der Mittelwert angenommen, welcher der gemessenen Verteilung zugrunde liegt. Außerdem sollen die Momente der gemessenen Verteilung berechnet und mit den theoretischen Verteilungen verglichen werden.

2 Grundlagen

Allgemeines zu Verteilungen

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung kann über seine zentralen Momente beschrieben werden. Dabei beinhaltet das erste zentrale Moment den Mittelwert und das zweite zentrale Moment die Varianz. Für den Mittelwert $\bar{x}$ gilt

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i h_i. \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet N die Anzahl der Einzelmessungen, x die Einzelergebnisse und h die Häufigkeit, mit der ein Ergebnis auftritt. Für die Varianz σ^2 gilt

$$\sigma^2 = s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N h_i (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.2)$$

woraus für die Standardabweichung s_x folgt

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sigma \quad (2.3)$$

sowie für den Fehler auf den Mittelwert

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}. \quad (2.4)$$

Für die Schiefe einer Verteilung, welche dem dritten zentralen Moment entspricht, gilt

$$S = \frac{1}{N s_x^3} \sum_{i=1}^N h_i (x_i - \bar{x})^3. \quad (2.5)$$

Dabei handelt es sich um eine Größe, die die Symmetrie einer Verteilung angibt. Als Maß wird dabei die Gaußverteilung verwendet, bei der es sich um eine symmetrische Verteilung handelt und deren Schiefe demnach 0 ist.

Das vierte zentrale Moment, Kurtosis oder Wölbung genannt, ergibt sich zu

$$K = \left(\frac{1}{N s_x^4} \sum_{i=1}^N h_i (x_i - \bar{x})^4 \right) - 3, \quad (2.6)$$

wobei die Kurtosis angibt, wie stark zentriert oder aufgeweitet eine Verteilung im Gegensatz zur Gaußverteilung ist, deren Wölbung 0 ist. Eine negative Wölbung gibt an, dass die Verteilung schwächer um den Mittelwert zentriert ist als die Normalverteilung, für eine positive Kurtosis ist sie stärker zentriert.

Zählexperimente

Für Zählexperimente, wie der hier im Versuch vorkommende radioaktive Zerfall, wird eine Häufigkeitsverteilung erwartet, die einer Binomialverteilung entspricht. Es handelt sich dabei um eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Ja-Nein-Ereignisses. Da die Werte für die Einzelmessungen N sehr groß sowie die Wahrscheinlichkeit p eines Zerfalls sehr klein sind, kann der Grenzfall der Poissonverteilung mit $N \cdot p = \text{const}$ hier angenommen werden. Diese Verteilung hat die Form

$$P_{\text{Poisson},\mu}(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}. \quad (2.7)$$

Dabei ist μ der Erwartungswert der Messergebnisse und x die Pulszahl, die die Anzahl der Zerfälle angibt. Hierbei wird innerhalb der Unsicherheiten angenommen, dass der Erwartungswert μ hier dem Mittelwert $\bar{x}$ entspricht. Dadurch ergibt sich, dass für die Varianz gilt:

$$\sigma^2 = \mu = \bar{x}. \quad (2.8)$$

Die Standardabweichung erhält man somit über

$$s_x = \sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{\bar{x}}. \quad (2.9)$$

Für die Schiefe und die Kurtosis gilt bei einer Poissonverteilung

$$S = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad (2.10)$$

$$K = \frac{1}{\mu}. \quad (2.11)$$

Die Herleitungen zu diesen Gleichungen ist im Anhang zu finden.

Die Gaußverteilung wird durch

$$P_{\text{Gauss},\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.12)$$

beschrieben. Die Poissonverteilung kann dabei als Gaußverteilung angenähert werden, wenn die mittlere Zerfallszahl hoch genug ist, etwa ab $\mu = 20 - 30$ Ereignissen. Dann gilt somit für die Gaußverteilung als Näherung der Poissonverteilung auch $\sigma^2 = \mu$, weswegen die Gaußverteilung auch als

$$P_{\text{Gauss},\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}\right) \quad (2.13)$$

geschrieben werden kann.

Um aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung P die Häufigkeitsverteilung H zu erhalten, muss die Gauß- bzw. Poissonverteilung mit der Anzahl der Einzelmessungen multipliziert werden, weshalb gilt:

$$H_{\text{Gauss}} = P_{\text{Gauss},\mu}(x) \cdot N, \quad (2.14)$$

$$H_{\text{Poisson}} = P_{\text{Poisson},\mu}(x) \cdot N. \quad (2.15)$$

Für die mittlere Zählrate $\dot{N}$, die angibt, wie viele Zerfälle im Mittel in einem gewissen Zeitintervall Δt vorkommen, gilt allgemein

$$\dot{N} = \frac{\mu}{\Delta t}. \quad (2.16)$$

3 Versuchsaufbau

Der Aufbau besteht aus einem radioaktiven Präparat (in diesem Fall $^{137}_{55}\text{Cs}$), das sich in einer Bleiabschirmung befindet. Das Cäsiumisotop wird dabei nach einer Halbwertszeit von 30 Jahren zu einem angeregten Barium-Kern, der einen γ -Quant aussendet, um in seinen Grundzustand zu kommen. Die Abschirmung hat ein kleines Loch, durch welches die γ -Strahlung austreten kann und dann auf ein Zählrohr trifft. Die Anordnung ist so aufgebaut, dass man diverse Absorberplatten zur Strahlungsabschirmung oder einen Bleiklotz zur beinahe vollständigen Abschirmung zwischen Präparat und Zählrohr schieben kann. Die γ -Quanten werden im Zählrohr registriert und die Zählimpulse mit einem Zähler gezählt. Die Spannung wird von einem separaten Hochspannungsmessgerät geliefert. Zur besseren Darstellung werden die Impulse an einen Computer weitergeleitet, der über ein Programm das Zählgerät steuern kann. Der Aufbau ist in Abbildung 1 dargestellt.

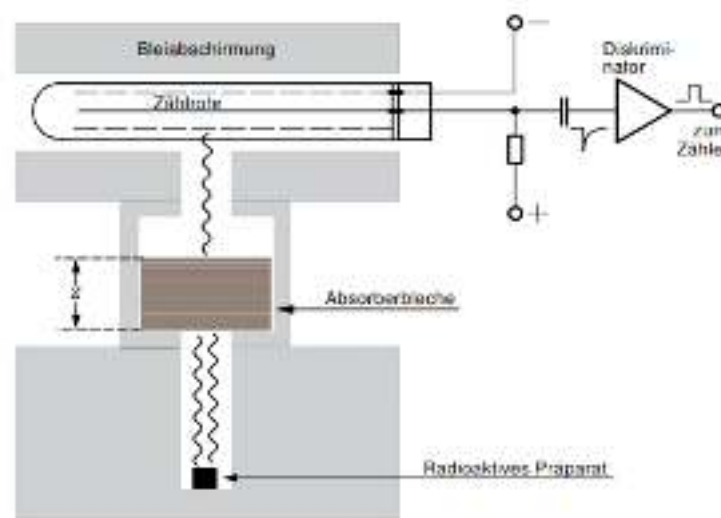


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit radioaktivem Präparat, Bleiabschirmung, Zählrohr, Spannungsquelle und Zähler, [1]

4 Versuchsdurchführung

Das Hochspannungsmessgerät musste etwa 20 Minuten vor Beginn der Messungen gestartet werden. Die Spannung war dabei auf etwa 500V eingestellt. Man führte alle Messungen an einem Computer durch, weshalb die Zählimpulse direkt an den PC geleitet wurden.

Für die erste Messreihe wurde der Bleiklotz entfernt, sodass die Strahlung nicht abgeschirmt wurde. Durch Ausprobieren ermittelte man zunächst, für welches Messzeitintervall zwischen 20 und 30 Impulse registriert werden, was in diesem Fall 1,5s entsprach. Dieses Intervall und die Anzahl der Einzelmessungen von 400 wurden am Computer eingegeben, danach musste das Programm lediglich durchlaufen. Zwischendurch und vor allem am Ende musste der Bereich des Histogramms mittels Autoscale angepasst werden. Nach Beendigung der Messung wurden die Rohdaten, die Tabellen und das Histogramm ausgedruckt.

Für die zweite Messreihe konnte durch das Einbringen von Absorberplatten erreicht werden, dass in einem Messzeitintervall von 0,5s etwa 4-6 Impulse registriert wurden. Danach wurde die Messung wieder mit 400 Einzelmessungen analog zum ersten Teil durchgeführt.

Im letzten Versuchsteil sollte der Bleiklotz wieder zum Aufbau hinzugefügt und dadurch die Strahlung beinahe vollständig abgeschirmt werden. Im eingestellten Messzeitintervall von 1,25s gab es nur noch 1-2 Impulse. Es wurden erneut 400 Einzelmessungen eingestellt und die Messung analog zu den vorherigen Messreihen durchgeführt.

5 Auswertung

Alle Messungsergebnisse sind im Anhang zu finden.

Zunächst wird der Mittelwert $\bar{x}$ der gemessenen Verteilung über (2.1) bestimmt. Darüber lässt sich dann mithilfe von (2.2) die Varianz s_x^2 bestimmen, deren Quadratwurzel die Standardabweichung s_x darstellt. Die Standardabweichung des Mittelwerts lässt sich über

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \quad (5.1)$$

berechnen, wobei N hier die Anzahl der Einzelmessungen entspricht, die den Wert $N = 400$ hat.

Die mittlere Zählrate berechnet sich über den Mittelwert pro Zeiteinheit, also durch

$$\dot{N} = \frac{\bar{x}}{\Delta t} \quad (5.2)$$

mit einer Unsicherheit von

$$s_{\dot{N}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}\Delta t}. \quad (5.3)$$

Die so zu berechnenden Werte werden für alle drei Messdurchgänge bestimmt und können Tabelle 1 entnommen werden. Messung 1 bezeichnet dabei die erste Messung bei hoher Zählrate, Messung 2 steht für die verminderte Zählrate und Messung 3 stellt die Messung des Nulleffekts dar, also die Messung mit sehr niedriger Zählrate.

Messung	$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	σ^2	$\sigma = s_x$	$\dot{N} [1/s]$	$s_{\dot{N}} [1/s]$
1	25,9	0,3	25,5	5,0	17,2	0,2
2	6,9	0,1	6,9	2,6	13,9	0,3
3	1,5	0,1	1,4	1,2	1,2	0,1

Tabelle 1: Berechnete Werte für Messung 1 mit mäßig hoher Zählrate, Messung 2 mit reduzierter Zählrate und Messung 3 mit sehr niedriger Zählrate

Um zu überprüfen, ob es sich bei der vorliegenden Verteilung, um eine Poissonverteilung handelt, wird die allgemein ermittelte Standardabweichung mit der einer Poissonverteilung verglichen. Da bei einer Poissonverteilung für die Varianz

$$\sigma^2 = \mu = \bar{x} \quad (5.4)$$

gilt und der Erwartungswert bei dieser Verteilung dem Mittelwert entspricht, ist die Standardabweichung somit

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{\bar{x}}. \quad (5.5)$$

Damit erhält man zusätzlich zur allgemeinen Standardabweichung die einer Poissonverteilung, die für den hier ermittelten Mittelwert

$$\sigma = \sqrt{\mu} = 5,1 \quad (5.6)$$

ist.

Anschließend wird für die gemessene Verteilung über (2.5) die Schiefe S berechnet, sowie die Kurtosis K mit (2.6).

Zum Vergleich werden die Schiefe und Wölbung für die theoretische Poissonverteilung über

$$S = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (5.7)$$

$$\text{und } K = \frac{1}{\mu} \quad (5.8)$$

berechnet, sowie die Werte der Schiefe und Kurtosis der Gaußverteilung herangezogen. Dabei sind beide bei der Gaußverteilung 0, da sie als Vergleichsfunktion für andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt und die Schiefe und Wölbung anderer Verteilungen bezüglich der Größen dieser Verteilung angegeben werden.

Die berechneten Werte für die drei Verteilungen sind in Tabelle 2 zu finden. S und K bezeichnen dabei Schiefe und Kurtosis, während die Indizes die Messung angeben, wobei die Benennung der Messung hier gleich ist wie zuvor.

	Datensätze	Poissonverteilung	Gaußverteilung
S_1	0,27	0,20	0
K_1	-0,01	0,04	0
S_2	0,28	0,38	0
K_2	-0,07	0,14	0
S_3	1,00	0,82	0
K_3	2,00	0,67	0

Tabelle 2: Schiefe und Kurtosis der Datensätze und aus den theoretischen Verteilungsfunktionen

Anschließend wird die gemessene Häufigkeitsverteilung in ein Diagramm eingetragen, in das zum zusätzlichen Vergleich andere bekannte Verteilungsfunktionen eingezeichnet sind.

Für die erste Messung mit hoher Zählrate wird die erhaltenen Verteilung mit der Gaußvergleichung verglichen, die man für den zuvor berechneten Mittelwert der gemessenen Verteilung erhält. Da man bei der Berechnung des Mittelwerts zusätzlich einen Fehlerbereich erhält, wird hier die Gaußverteilung des Mittelwerts, sowie die der äußersten Werte des Intervalls eingezeichnet, sodass man drei Normalverteilungen erhält, die als Mittelwerte $\bar{x}$, $\bar{x} - s_{\bar{x}}$ und $\bar{x} + s_{\bar{x}}$ haben.

Dies ist in Abbildung 2 zu sehen, wobei die als Vergleich dienenden Gaußverteilungen durch gestrichelte Linien deutlich gemacht werden, die hier für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen stehen und nur zur besseren Verdeutlichung als Linie gezeigt werden.

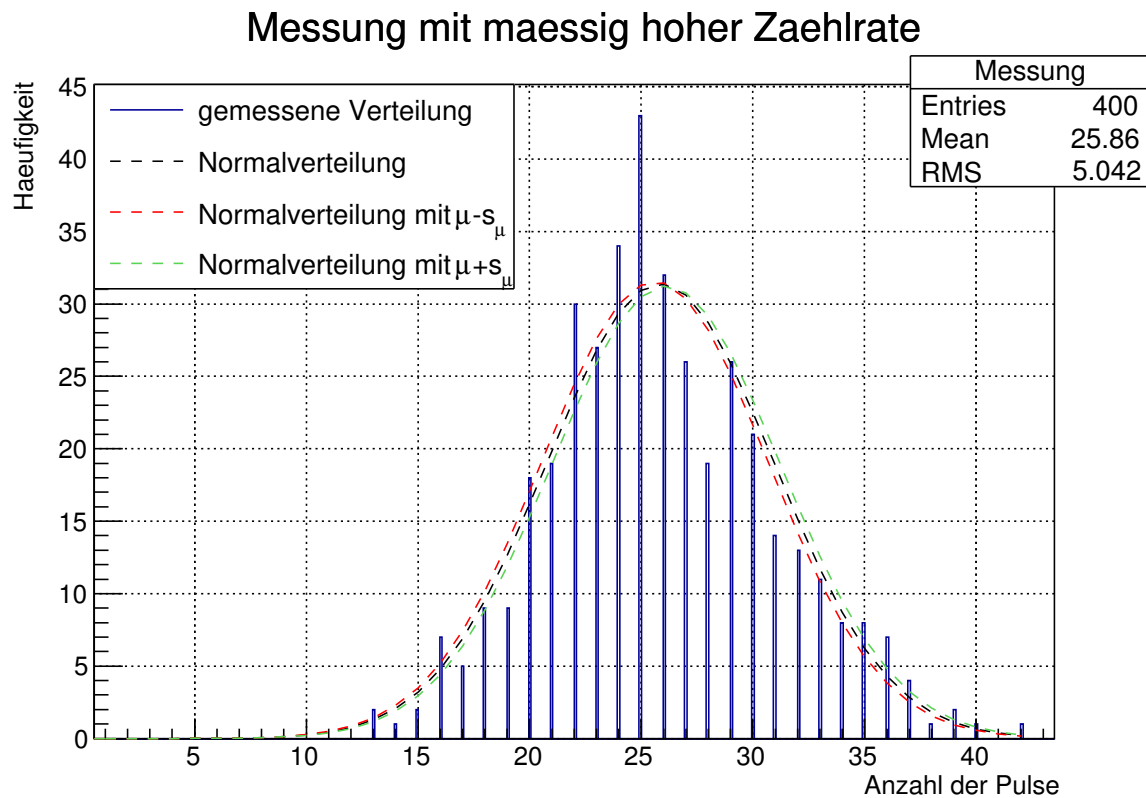


Abbildung 2: Gemessene Verteilungsfunktion sowie Gaußverteilungen, die den Mittelwert mit Fehlerintervall angeben und hier eine diskrete Verteilung darstellen, die zur Anschaulichkeit als kontinuierliche Verteilung eingezeichnet werden

Um die Übersichtlichkeit der Grafiken erhalten zu können, werden im Folgenden nur die Gauß- und Poissonverteilungen des Mittelwerts und nicht zusätzlich die der Fehlerintervalle eingezeichnet. Die Dimension des Fehlerintervalls ist dabei jeweils ähnlich und wird bei Aussagen zum Diagramm berücksichtigt, aber nicht eingezeichnet.

Für die zweite Messreihe mit reduzierter Zählrate wird die beobachtete Verteilung mit der Gauß- und der Poissonverteilung verglichen. Dies kann Abbildung 3 entnommen werden, wobei die Vergleichsverteilungen auch hier durch unterbrochene Linien dargestellt werden, die erneut lediglich zur besseren visuellen Darstellung der diskreten Verteilungen gelten.

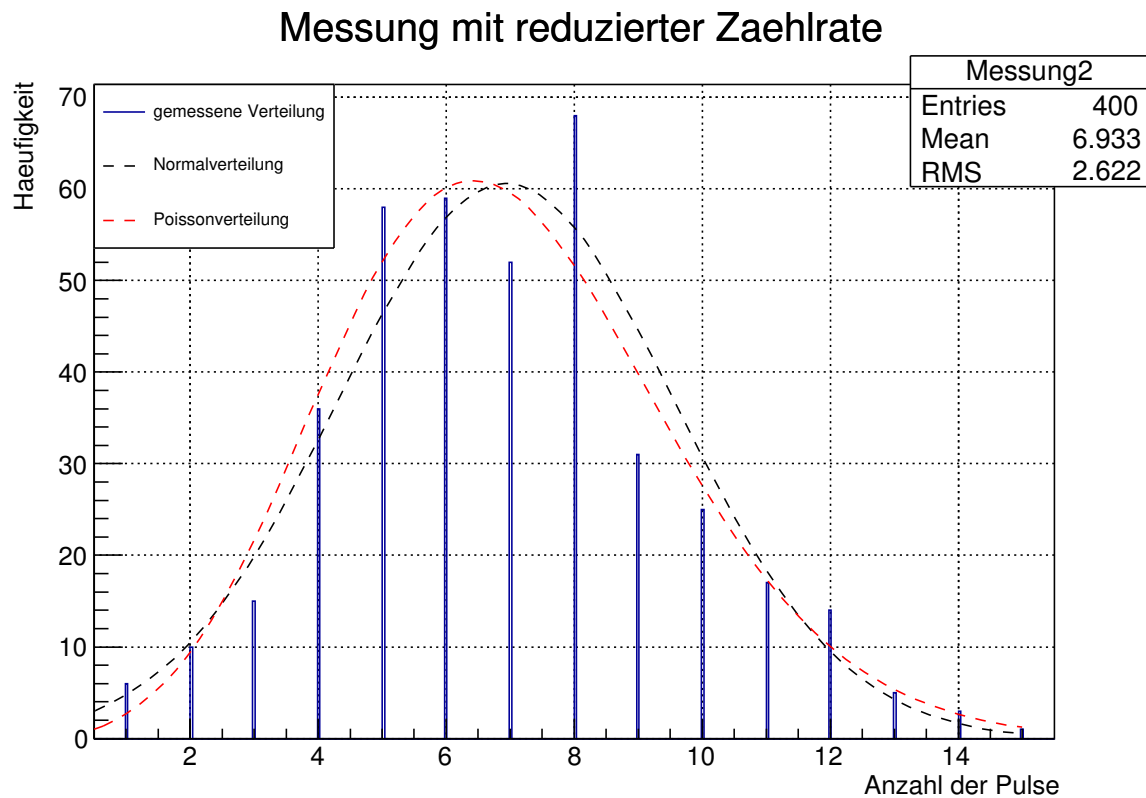


Abbildung 3: Verteilung der Messung mit reduzierter Zählrate sowie zum Vergleich eingezeichnete Normal- und Poissonverteilung zum Mittelwert der gemessenen Verteilung, die zur anschaulicheren Darstellung dabei als durchgängige Verteilung dargestellt werden

Dies wurde analog noch für die letzte Messung des Nulleffekts bei sehr niedriger Zählrate durchgeführt. Auch hier werden zur Anschaulichkeit lediglich die zum Vergleich dienenden Verteilungen des Mittelwerts ohne zusätzliche Berücksichtigung des Fehlerintervalls eingezeichnet. Der Verlauf der Verteilungen ist in Abbildung 4 zu sehen.

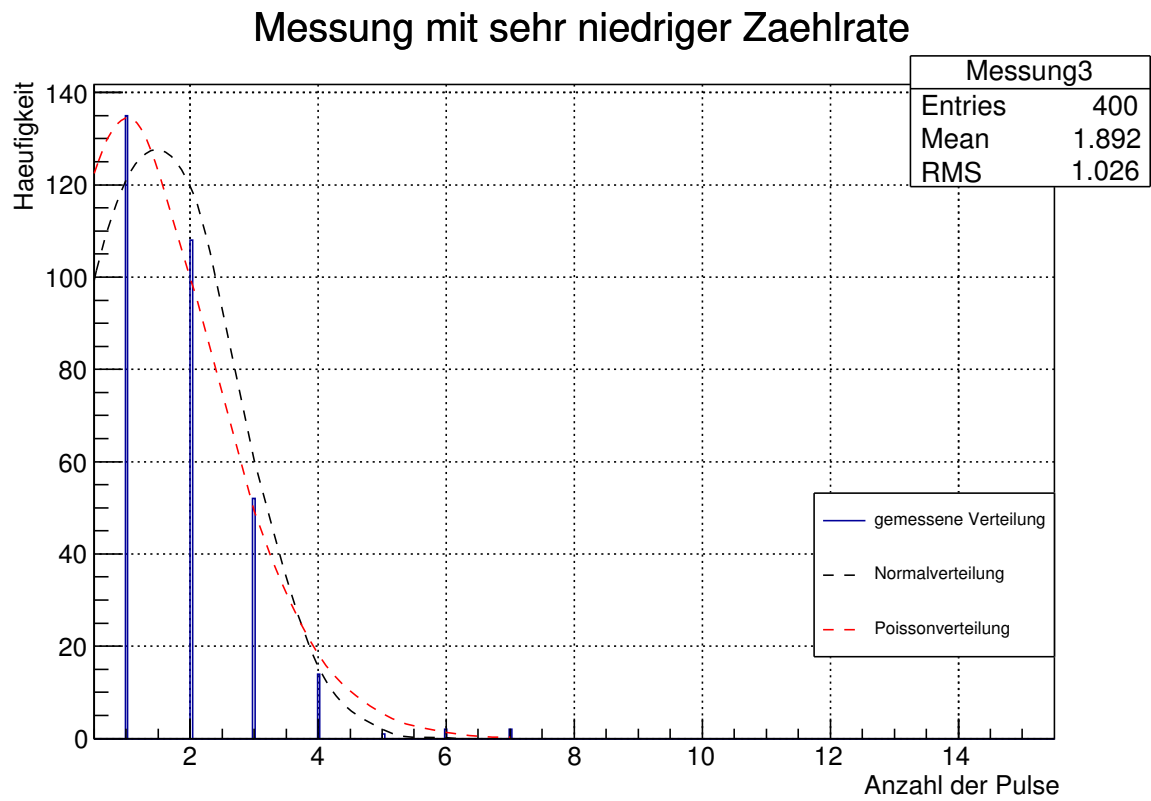


Abbildung 4: Messung des Nulleffekts und zum Vergleich eingezeichnete Gauß- sowie Poissonverteilung, die hier Verdeutlichung als kontinuierlich eingezeichnet werden

6 Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Messung 1: Messung mit mäßig hoher Zellrate

Der für die gemessene Verteilung zu berechnende Mittelwert $\bar{x}$ mit Unsicherheit $s_{\bar{x}}$ sowie die Varianz s_x^2 mit Standardabweichung s_x können Tabelle 3 entnommen werden. Zusätzlich kann dort noch die Zählrate $\dot{N}$ mit Fehler für die erste Messung entnommen werden.

$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	σ^2	$\sigma = s_x$	$\dot{N}$ [1/s]	$s_{\dot{N}}$ [1/s]
25,9	0,3	25,5	5,0	17,2	0,2

Tabelle 3: Berechnete Werte für Messung 1 mit mäßig hoher Zählrate

Die zum Vergleich über $s_x = \sqrt{\mu}$ berechnete Standardabweichung, die für eine Poissonverteilung gilt, liegt nahe an der ohne Annahme einer bestimmten Verteilung berechneten Standardabweichung von $s_x = 5,0$. Dies zeigt, dass die Annahme einer zugrundeliegenden Poissonverteilung hier sinnvoll ist.

Vergleicht man die gemessene Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der dazu über denselben Mittelwert berechneten Gaußverteilung, fällt auf, dass die gemessene Verteilung asymmetrisch ist, da sie ihr Maximum etwas nach links verschoben hat im Vergleich zur Normalverteilung und zusätzlich mehr nach rechts ausläuft.

Die hier grafisch dargestellte Verteilung entspricht der Gaußverteilung somit nicht wirklich. Dies kann unter anderem dadurch erklärt werden, dass die Gaußverteilung als Näherung einer Poissonverteilung für größere Mittelwerte $\bar{x}$ immer zutreffender wird und ab einem Mittelwert von $\bar{x} \approx 30$ gut angenommen werden kann. Da in dieser Messung der Mittelwert niedriger ist, ist die Annäherung durch eine Gaußverteilung noch nicht ganz passend.

Die zugehörigen quantitativen Werte der Schiefe und Wölbung der gemessenen Verteilungen sowie die dazugehörigen berechneten Werte der Normal- und Poissonverteilung können in Tabelle 4 eingesehen werden.

Verteilung	Schiefe	Kurtosis
gemessen	0,27	-0,01
Poisson	0,20	0,04
Gauß	0	0

Tabelle 4: Vergleich der Schiefe und Kurtosis der ersten gemessenen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den theoretischen Werten der Gauß- und Poissonverteilung

Aus den berechneten Werten lässt sich sagen, dass die gemessene Verteilung nach rechts ausläuft und nicht wie die Normalverteilung symmetrisch ist. Diese Eigenschaften weist auch die Poissonverteilung auf. Die Zentrierung um den Mittelwert ist dabei etwas schwächer im Vergleich zu einer Gaußverteilung.

Daher ist der für die Schiefe der Poissonverteilung erhaltene Wert deutlich passender, während bei der Kurtosis die Gaußverteilung besser zutrifft. Es ist dabei jedoch für die theoretischen Werte der Poissonverteilung nicht möglich, auf negative Werte für die Kurtosis zu kommen, da eine Poissonverteilung immer eine positive Wölbung hat und nie eine negative. Somit kann dieser Wert nicht mit der aus den Messdaten berechneten Kurtosis übereinstimmen. So gesehen, liegt die Kurtosis der Poissonverteilung relativ nah an der aus den Messergebnissen bestimmten.

Allerdings ist es nicht möglich, die Werte quantitativ zu vergleichen, ohne Fehler auf die zu

vergleichenden Werte zu haben, weswegen dies hier lediglich qualitativ geschieht.

Die Differenzen der aus den theoretischen Verteilung berechneten Werten zu den aus den Messergebnissen erhaltenen kann dadurch erklärt werden, dass es sich bei der Poissonverteilung um einen Grenzfall der Binomialverteilung handelt, der bei einer gegen unendlich gehenden Anzahl von Einzelmessungen sowie abnehmender Wahrscheinlichkeit p eines Ergebnisses angewendet werden kann. Es wurden hier jedoch lediglich 400 Einzelmessungen durchgeführt, sodass dies noch nicht wirklich ausreichend ist, damit die Beschreibung durch die Poissonverteilung für unendlich viele Messwerte zutrifft.

Da es sich auch bei der Gaußverteilung um einen Grenzfall bei einer gegen unendlich gehenden Zahl von Messungen handelt, reicht die Anzahl der Messungen auch hier nicht aus, damit es sich bei der Normalverteilung um eine gute Beschreibung der gemessenen Verteilung handelt. Außerdem, dass die Gaußverteilung hier als Näherung der Poissonverteilung für große Mittelwerte angesehen wird, es jedoch möglich ist, dass das Kriterium eines großen Mittelwerts hier nicht ausreichend erfüllt ist.

6.2 Messung 2: Messung mit reduzierter Zählrate

Die hier analog zur ersten Messung zu bestimmenden Werte sind zusammenfassend in Tabelle 5 dargestellt.

$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	σ^2	$\sigma = s_x$	$\dot{N} [1/s]$	$s_{\dot{N}} [1/s]$
6,9	0,1	6,9	2,6	13,9	0,3

Tabelle 5: Berechnete Werte für Messung 2 mit reduzierter Zählrate

Hier wird die gemessene Verteilung sowohl mit der Poissonverteilung als auch mit der Normalverteilung verglichen. Der Mittelwert ist dabei deutlich kleiner als bei der Messung zuvor. Die Poissonverteilung ist hier als zugrunde liegende Verteilung wesentlich zutreffender als die Gaußverteilung, da die experimentell bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung asymmetrisch ist und deutlich besser durch Poisson angenähert werden kann.

Die berechneten Werte der Schiefe und Kurtosis für alle drei Verteilungen können Tabelle 6 entnommen werden.

Verteilung	Schiefe	Kurtosis
gemessen	0,28	-0,07
Poisson	0,38	0,14
Gauß	0	0

Tabelle 6: Vergleich der Schiefe und Kurtosis der zweiten gemessenen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den theoretischen Werten der Gauß- und Poissonverteilung

Daraus lässt sich ablesen, dass auch hier die gemessene Verteilung nach rechts ausläuft und nicht symmetrisch ist, was eher die Eigenschaften einer Poissonverteilung als einer Gaußverteilung sind. Bei der Schiefe ist dabei wieder die symmetrische Gaußverteilung näher dran als die stärker zentrierte Poissonverteilung. Die Schiefe der Poissonverteilung liegt somit näher an der der Messergebnisse als die Normalverteilung. Für die Kurtosis ist es genau andersrum.

Auch hier greift die Begründung, dass die Anzahl der durchgeführten Einzelmessungen nicht ausreicht, um den Grenzfall der Poisson- und Gaußverteilung für unendlich viele Messung zu friedensstellend anwenden zu können.

6.3 Messung 3: Messung mit sehr niedriger Zählrate

Wie zuvor können die zu bestimmenden Werte des Mittelwerts mit Unsicherheit, Varianz und Standardabweichung sowie Zählrate mit Fehler Tabelle 7 entnommen werden.

$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	σ^2	$\sigma = s_x$	$\bar{N}$ [1/s]	$s_{\bar{N}}$ [1/s]
1,5	0,1	1,4	1,2	1,2	0,1

Tabelle 7: Berechnete Werte für Messung 3 mit sehr niedriger Zählrate

Bei der grafischen Darstellung fällt dabei auf, dass hier die Poissonverteilung gut zur gemessenen Verteilung passt, während die Normalverteilung überhaupt nicht zutreffend ist. Der Mittelwert der Verteilung ist dabei noch kleiner als in den Messungen zuvor.

Die Normalverteilung stellt somit in keiner der drei Messungen eine geeignete Näherung der Verteilung dar, während Poisson deutlich passender ist. Je kleiner dabei der Mittelwert ist, desto weniger zutreffend ist die Gaußverteilung. Ein Grund dafür, dass Gauß nicht passt und die gemessene Verteilung mit abnehmendem Mittelwert immer weniger geeignet ist, ist, dass für eine Näherung einer Poissonverteilung durch eine Gaußverteilung der Mittelwert ausreichend groß sein muss. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall und es kann beobachtet werden, dass die Näherung immer weniger passt, je kleiner der Mittelwert wird.

Die Ergebnisse für Schiefe und Kurtosis der gemessenen Verteilung sowie die dazu berechneten Werte der Poisson- und Gaußverteilung sind in Tabelle 8 genannt.

Verteilung	Schiefe	Kurtosis
gemessen	1,00	2,00
Poisson	0,82	0,67
Gauß	0	0

Tabelle 8: Vergleich der Schiefe und Kurtosis der dritten gemessenen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den theoretischen Werten der Gauß- und Poissonverteilung

Aus diesen Ergebnissen lässt sich ablesen, dass die gemessene Verteilung gegenüber der Gaußverteilung deutlich nach links verschoben ist und nach rechts ausläuft, was auch auf die Poissonverteilung zutrifft. Zudem ist auch hier die stärker zentrierte Kurtosis der Poissonverteilung näher an der gemessenen Verteilung dran, da diese hier ebenfalls stark zentriert ist. Gauß ist hier vergleichsweise sehr unpassend.

Die großen Abweichungen der aus den Messergebnissen berechneten Werten sowie derer, die aus den theoretischen Verteilungen stammen, lassen sich auch im letzten Teil dadurch erklären, dass die Anzahl der Einzelmessungen nicht ausreichend ist. Dazu kommt, dass die gemessene Verteilung hier einen sehr kleinen Mittelwert hat, sodass die Gaußverteilung als Näherung für die Poissonverteilung hier nicht zutrifft.

7 Literatur

- [1] *Versuch 24: Statistische Schwankungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; Physiklabor für Anfänger*innen Teil 2, Teil A, S.60-63.*

8 Anhang

Berechnung der Schiefe einer Poissonverteilung als Funktion von μ

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\sigma^3} \sum_x (x - \mu)^3 P(x) \quad \text{mit } P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_x (x - \mu)^3 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\sigma^3} \sum_x (x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3) \frac{\mu^x}{x!} \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\sigma^3} \sum_x \left(x^3 \frac{\mu^x}{x!} - 3x^2 \mu \frac{\mu^x}{x!} + 3x\mu^2 \frac{\mu^x}{x!} - \mu^3 \frac{\mu^x}{x!} \right) \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\sigma^3} \left(\sum_x x^3 \frac{\mu^x}{x!} - 3\mu \sum_x x^2 \frac{\mu^x}{x!} + 3\mu^2 \sum_x x \frac{\mu^x}{x!} - \mu^3 \sum_x \frac{\mu^x}{x!} \right) \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\sigma^3} \left(\sum_x x^3 \frac{\mu^x}{x!} - 3\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_x \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} + 3\mu^3 e^\mu - \mu^3 e^\mu \right) \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\sigma^3} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu e^\mu) - 3\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu e^\mu) + 3\mu^3 e^\mu - \mu^3 e^\mu \right) \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\sigma^3} (\mu + 3\mu^2 - 3\mu^2 + \mu^3 - \mu^3 - \mu^3 - 3\mu^3 \mu^3) \\
&= \frac{\mu}{\sigma^3} \quad \text{mit } \sigma^2 = \mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu}}
\end{aligned}$$

Die Kurtosis kann analog bestimmt werden und führt zu dem Ergebnis

$$K = \frac{1}{\mu}. \quad (8.1)$$

Versuch 24

12.03.18

Teil 1: 25 Impulse in 15.5

① → Messzeitintervall: 1.55

Maximalzahl von Einzelmessungen:

Spannung: 500V ± 0.5 digits
 ± 1V bei 100V
 ± 0.1V bei 10V
 → 500V ± 1V ungenau

Teil ② Impulse Zeit

50	3.07
50	3.09
50	3.14
50	2.97
50	3.16
50	2.83

→ mit Platten: 50 ± ca. 55

→ Messzeitintervall von 0.55

Teil ③

Messzeitintervall von 1.255

600 Einzelmessungen

V. 1. V. 9. 12.7.