

Versuch 50

Wechselspannungen und -ströme

Protokoll des Anfänger-Praktikums II



Gruppe 14

Durchgeführt am
02.03.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	3
2	Grundlagen	4
3	Versuchsaufbau	6
4	Versuchsdurchführung	7
4.1	A. Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop	7
4.2	B.1 Qualitative Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen	7
4.3	B.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom- und Spannungsmessung	7
5	Auswertung	9
5.1	Teil A	9
5.2	Teil B	12
5.2.1	(a) Schaltung, Aufbau und Erläuterung zur Schaltung	12
5.2.2	(b) Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom- und Spannungsmessung	13
6	Zusammenfassung und Diskussion	20
6.1	Teil A	20
6.2	Teil B.1	22
6.3	Teil B.2	22
7	Literatur	24
8	Anhang	25

1 Versuchsziel

Teil A

Das Ziel dieses Versuchsteils ist es, sich zunächst mit dem Oszilloskop vertraut zu machen und dann verschiedene Werte qualitativ und quantitativ zu untersuchen. Dabei soll zunächst der Spannungsverlauf bei verschiedenen Signalformen im Hinblick auf Änderungen der Amplitude und Frequenz qualitativ betrachtet werden. Danach sollen für drei verschiedene Frequenzen Periodendauer und Spannung quantitativ bestimmt werden und zwar für unterschiedliche Signalformen am Funktionengenerator. Dabei soll bei einer Frequenz die Spannung zusätzlich mit einem digitalen Multimeter gemessen werden.

Teil B

Zunächst soll in diesem Aufgabenteil ein Stromkreis mit einem ohmschen Widerstand, einer Spule oder einem Kondensator aufgebaut werden. Dieses Bauteil stellt dabei den Lastwiderstand dar. Zuerst sollen an diesem Stromkreis lediglich die qualitativen Veränderungen des Widerstands bei einer sinusförmigen Spannung mit bestimmter Frequenz untersucht werden. Im Anschluss werden Strom und Widerstand bei verschiedenen Frequenzen sowie die Phasenverschiebung quantitativ bestimmt. Damit sollen der ohmsche Widerstand und die Induktivität der Spule und die Kapazität des Kondensators ermittelt werden. Der ohmsche Widerstand der Spule wird dabei zusätzlich direkt mit einem digitalen Multimeter gemessen.

Teil C

Hierbei soll die Kapazität des Kondensators und die Induktivität der Spule mit Hilfe einer Wechselstrombrücke bestimmt werden.

2 Grundlagen

Für eine zeitlich veränderliche sinusförmige Spannung U mit

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \quad (2.1)$$

gilt an einem ohmschen Widerstand R folgender Zusammenhang:

$$U = R \cdot I \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet I die Stromstärke. Für die Periodendauer T einer solchen Spannung gilt allgemein

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (2.3)$$

$$\text{mit } \omega = 2\pi f. \quad (2.4)$$

Dabei ist ω die Kreisfrequenz und ν die Frequenz des sinusförmigen Signals.

An anderen Bauteilen also an einem ohmschen Widerstand ist der kapazitive Widerstand von der Kreisfrequenz abhängig. So gilt für einen Kondensator mit Kapazität C

$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.5)$$

Für eine Spule mit Induktivität L dagegen ergibt sich der induktive Widerstand zu

$$Z_L = \frac{U}{I} = \omega L. \quad (2.6)$$

Die Herleitung dieses Zusammenhangs ist im Anhang zu finden. Reale Spulen haben neben ihrem induktiven Widerstand auch immer noch einen ohmschen Anteil. Die Impedanz der Spule berechnet sich über

$$Z_{R,L} = \sqrt{(\omega L)^2 + (R_L)^2}. \quad (2.7)$$

Zusätzlich gilt außerdem

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R_L}. \quad (2.8)$$

Die Effektivwerte der Spannung und des Stroms sind definiert als die Werte, die an einem ohmschen Widerstand dieselbe mittlere Leistung produzieren, wie ein ebenso starker Gleichstrom. Die Zusammenhänge zwischen Amplitude, Effektivwert und Betragsmittelwert der Spannung sind im Anhang hergeleitet. Das Ergebnis für eine sinusförmige Spannung ist dabei

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

$$\text{und } |\overline{U}| = \frac{2U_0}{\pi}. \quad (2.10)$$

Für eine Rechteckspannung ergibt sich

$$U_{eff} = U_0 \quad (2.11)$$

$$\text{und } |\overline{U}| = U_0. \quad (2.12)$$

Bei der Dreiecks- und Sägezahnspannung erhält man äquivalente Ergebnisse von

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \quad (2.13)$$

$$\text{und } |\overline{U}| = \frac{U_0}{2}. \quad (2.14)$$

Eine häufig verwendete Möglichkeit, einen Widerstand zu messen, besteht in einer Wechselstrombrücke (z.B. einer Wheatstoneschen Messbrücke). Dafür wird eine Schaltung entsprechend Abbildung 1 aufgebaut. In diesem Beispiel handelt es sich um die Bestimmung der Kapazität eines Kondensators.

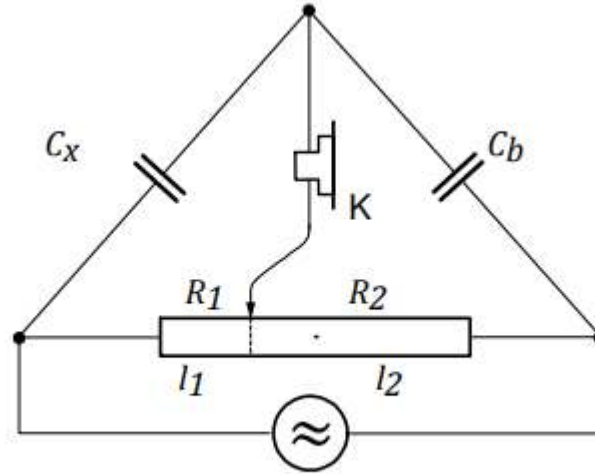


Abbildung 6.10: Wechselstrombrücke zur Messung von Kapazitäten

Abbildung 1: Wechselstrombrücke zur Messung der unbekannten Kapazität C_x mit Kopfhörern für den Abgleich [1]

Um den Abgleich messen zu können, werden hier Kopfhörer verwendet. Abgeglichen wird, indem man die Größe der beiden ohmschen Widerstände solange verändert bis folgender Zusammenhang erfüllt ist:

$$\frac{R_x}{R_b} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (2.15)$$

Dabei bezeichnet R_x den Widerstand des unbekannten Kondensators, R_b den des Kondensators mit bekanntem Widerstand, R_1 und R_2 bekannte Widerstände sowie l_1 und l_2 die Längen der ohmschen Widerstände. Da bei Kondensatoren deren ohmsche Anteile des Widerstands in der Regel vernachlässigt werden können, ergibt sich für das Verhältnis der beiden Widerstände der Kondensatoren

$$\frac{R_x}{R_b} = \frac{1/\omega C_x}{1/\omega C_b}. \quad (2.16)$$

Darüber kann die Kapazität des unbekannten Kondensators direkt bestimmt werden.

3 Versuchsaufbau

Teil A

In diesem Versuchsteil werden lediglich das Steckbrett, das Oszilloskop, der Funktionengenerator, ein digitales Voltmeter und Verbindungskabel benötigt. Dabei wurden zuerst der Funktionengenerator an zwei verschiedene Felder des Steckbretts angeschlossen und das Oszilloskop mit denselben beiden Felder verbunden, um die Spannung damit abzugreifen. Im zweiten Teil wurde noch ein Digitalmultimeter parallel dazu angeschlossen. Es wurden keine weiteren Bauteile verwendet.

Teil B

Die Schaltung aus dem ersten Versuchsteil wurde hier noch ergänzt. Das Digitalmultimeter wurde allerdings entfernt. Hinzu kam ein kleiner Widerstand R_m , welcher zur Strommessung verwendet wurde und je nach Aufgabe ein Kondensator, ein ohmscher Widerstand oder eine Spule. Außerdem wurde ein Differential-Tastkopf in die Schaltung mit eingebaut, um die Differenz der beiden Signale von R_m und dem jeweils anderen Bauteil galvanisch zu entkoppeln. Der Tastkopf ist dabei batteriebetrieben. Der genaue Aufbau, der auf dem Steckbrett aufgebaut werden musste, ist in Abbildung 2 zu sehen.

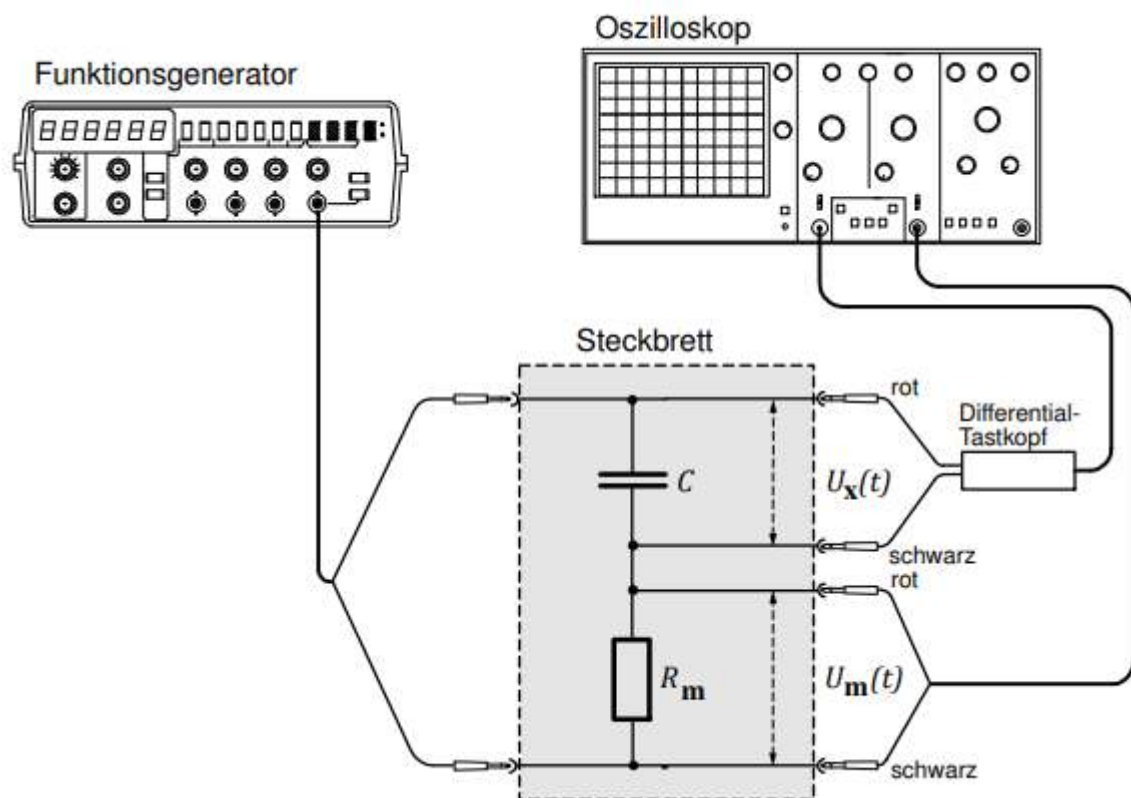


Abbildung 2: Schaltung auf Steckbrett mit Kondensator, kleinem Widerstand R_m , Differential-Tastkopf und den Anschlüssen zum Funktionengenerator und zum Oszilloskop [1]

Teil C

Dieser letzte Versuchsteil konnte aus zeitlichen Gründen nicht mehr aufgebaut und durchgeführt werden und wird deshalb auch im Weiteren nicht mehr beachtet.

4 Versuchsdurchführung

4.1 A. Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop

1. Vorbereitung: Schaltungsaufbau, Bedienung des Oszilloskops

Nach dem Einschalten des Funktionengenerators und des Oszilloskops wurde zunächst ein sinusförmiges Signal mit einer beliebigen Frequenz eingestellt. Damit wurde durch Skalenänderung der Spannungs- und der Zeitachse das Signal als gut sichtbare Sinusfunktion auf dem Oszilloskop angezeigt. Danach wurde das Triggerlevel am Oszilloskop so verändert, dass die Sinusfunktion nicht mehr durch den Bildschirm des Oszilloskops durchläuft sondern eine konstante Funktion zu sehen war. Außerdem wurde die Funktionsweise des Positionsreglers, der über das Menü zu finden war, getestet. Zusätzlich wurden die Auswirkungen durch Veränderungen des Gleichspannungsoffsets und der Symmetrie beobachtet. Dies wurde mit verschiedenen Spannungsverläufen probiert.

2. Quantitative Bestimmung der Spannung bei verschiedenen Spannungsverläufen

Zunächst wurde ein Digitalmultimeter parallel zum Oszilloskop geschaltet und auf den Wechselspannungsmessbereich von bis zu 20 V eingestellt. Am Oszilloskop wurde sichergestellt, dass die Eingangskopplung auf "DC" gestellt war. Außerdem musste kontrolliert werden, dass das Signal auf dem Oszilloskop symmetrisch ist und der Gleichspannungsoffset null entspricht.

Danach wurden die Spannung von der einen zur anderen Spitze am Oszilloskop U_{ss} (doppelte Amplitude) und die effektive Spannung U_{eff} am Multimeter, sowie die Periodendauer, welche am Oszilloskop abzulesen war, gemessen. Außerdem war es wichtig, die Empfindlichkeit und die Zeitablenkung zu protokollieren.

Diese Messung mit allen drei Spannungsverläufen wurde noch mit zwei weiteren Frequenzen wiederholt.

4.2 B.1 Qualitative Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen

In diesem Versuchsteil wurde qualitativ der Zusammenhang zwischen dem Strom und der Spannung bei einem ohmschen Widerstand, einer Spule und einem Kondensator untersucht. Dabei war die am Oszilloskop angezeigte Spannung für den zweiten Ausgang proportional zum Strom, da die beiden über den ohmschen Widerstand R_m , der sehr klein sein muss, zusammenhängen. Sie haben dabei auch keine Phasenverschiebung, weshalb der qualitative Verlauf des Strom über diese angezeigte Spannung untersucht werden konnte.

Dabei wurden bei allen drei unterschiedlichen Bauteilen die Veränderung von Strom und Spannung beobachtet, wenn man die ursprüngliche Frequenz von 2 kHz geringer oder höher dreht. Außerdem wurde bei einem geeigneten Abschnitt die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung abgelesen.

4.3 B.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom- und Spannungsmessung

In diesem Teil sollte eine quantitative Berechnung des Widerstands der drei Bauelemente durchgeführt werden.

Dafür wurden zunächst die doppelten Amplituden U_{ss} und I_{ss} gemessen. Außerdem wurden die Phasenbeziehungen zwischen Strom und Spannung für den ohmschen Widerstand quantifiziert. Im Anschluss wurde die Messung äquivalent für den Kondensator durchgeführt. Bei der Spule gab es eine kleine Ergänzung, da zusätzlich der ohmsche Widerstand der Spule mit einem Digitalmultimeter mit Messbereich bis 200Ω bestimmt wurde.

5 Auswertung

Alle Messergebnisse sind im Anhang zu finden.

Der Fehler auf alle vom Oszilloskop abgelesene Werte beträgt

$$s_{osz} = 3\% \text{ vom Messwert} \quad (5.1)$$

Dabei handelt es sich um die Toleranz des Messgeräts.

Als Ablesefehler wurde

$$s_{abl} = \frac{2}{10} \text{ division} \quad (5.2)$$

abgeschätzt.

Den insgesamten Fehler erhält man damit über

$$s = \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \text{Messwert}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{10} \cdot \text{div}\right)^2}, \quad (5.3)$$

wobei die Toleranz des Geräts durch $\sqrt{3}$ geteilt werden muss, um daraus die Standardabweichung zu erhalten.

5.1 Teil A

Zunächst wurde der Spannungsverlauf verschiedener periodischer Signalformen untersucht. Verwendet wurden dabei ein Sinus-, ein Rechtecks- und ein Dreiecksverlauf. Diese sind in Abbildung 3, 4 und 5 beispielhaft eingezeichnet. Dabei wurde unter anderem die Frequenz und Amplitude verändert, um qualitative auszusagen, wie der Spannungsverlauf sich ändert.

Bei einer Änderung der Frequenz ändert sich dabei lediglich die Periodendauer, nicht aber die Amplitude, die der Maximalspannung entspricht. Ändert man dagegen die Amplitude, wird die mögliche Maximalspannung größer oder kleiner, die Periodendauer bleibt jedoch gleich.

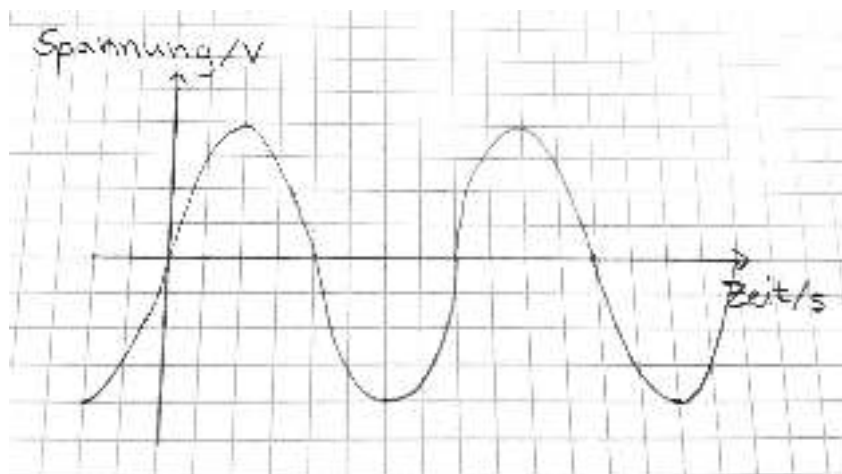


Abbildung 3: Qualitativer Verlauf eines sinusförmigen Signals

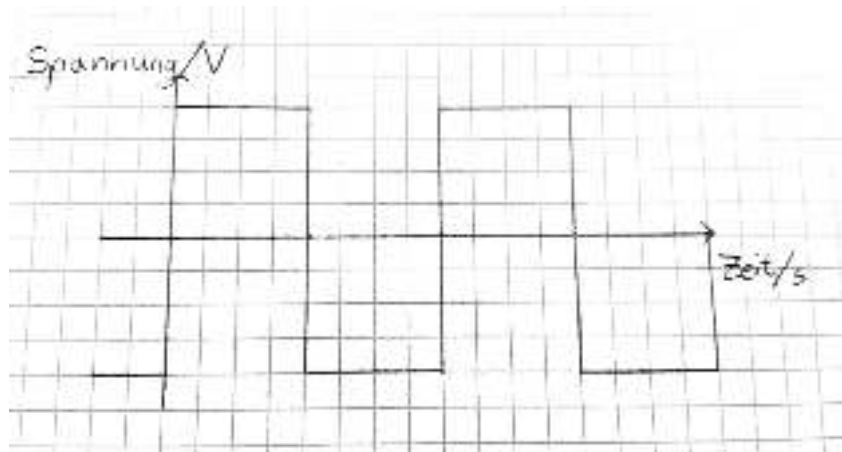


Abbildung 4: Qualitativer Verlauf eines Rechtecksignals



Abbildung 5: Qualitativer Verlauf eines Dreieckssignals

Um über das Verhalten von Periodendauer und Amplitude bei einer Änderung der Frequenz quantitative Aussagen treffen zu können, wurden für die verschiedenen Signalformen Spannung und Periodendauer für unterschiedliche Frequenzen gemessen. Dabei wurde zusätzlich für eine der Frequenzen, in diesem Fall für $f \approx 2\text{kHz}$, der Effektivwert der Spannung mit einem Digitalmultimeter bestimmt.

Um dies mit der am Oszilloskop angegebenen Spannung vergleichen zu können, muss aus dieser erst der Effektivwert berechnet werden, da das Oszilloskop die spitze-spitze Spannung, die der doppelten Amplitude entspricht, angibt. Dies geschieht für den Sinus über Gleichung 2.9, für die Rechteckanregung über 2.11 und für den Dreiecksverlauf mit 2.13. Dabei wird zur Berechnung des Effektivwert die einfache Amplitude der Spannung, also die Hälfte des am Oszilloskop abgelesenen Werts verwendet.

Die zu vergleichenden Effektivwerte der Spannung können für die verschiedenen Frequenzen Tabelle 1, 2 und 3 entnommen werden. U_{osz} bezeichnet dabei den Effektivwert für die Spannung, der aus dem am Oszilloskop abgelesenen Wert berechnet wurde, während U_{DMM} den über das Digitalmultimeter gemessenen Effektivwert bezeichnet.

Signalform	f [kHz]	U_{osz} [V]	$s_{U_{osz}}$ [V]	U_{DMM} [V]	$s_{U_{DMM}}$ [V]
Sinus	0,5014	4,24	0,36	4,17	0,07
Rechteck	0,5015	6,00	0,36	6,73	0,07
Dreieck	0,5015	3,52	0,36	3,34	0,07

Tabelle 1: Effektivwerte der Spannung für verschiedene Anregungsformen bei einer Frequenz von $f = 0,5\text{kHz}$

Signalform	f [kHz]	U_{osz} [V]	$s_{U_{osz}}$ [V]	U_{DMM} [V]	$s_{U_{DMM}}$ [V]
Sinus	2,004	4,24	0,36	3,98	0,07
Rechteck	2,003	5,90	0,36	6,86	0,07
Dreieck	2,004	3,46	0,36	3,16	0,07

Tabelle 2: Effektivwerte der Spannung für verschiedene Anregungsformen bei einer Frequenz von $f = 2\text{kHz}$

Signalform	f [kHz]	U_{osz} [V]	$s_{U_{osz}}$ [V]	U_{DMM} [V]	$s_{U_{DMM}}$ [V]
Sinus	10,04	4,24	0,36	3,55	0,07
Rechteck	10,04	6,00	0,36	7,49	0,07
Dreieck	10,04	3,52	0,36	2,63	0,07

Tabelle 3: Effektivwerte der Spannung für verschiedene Anregungsformen bei einer Frequenz von ca. $f = 10\text{kHz}$

Den Fehler auf den berechneten Effektivwert von U_{osz} erhält man dabei über

$$s_{U_{osz}} = \frac{s_{U_{ss}}}{2\sqrt{2}}. \quad (5.4)$$

$s_{U_{ss}}$ bezeichnet den Fehler auf die spitze-spitze Spannung, die das Oszilloskop liefert. Der Fehler darauf berechnet mithilfe von Gleichung 5.3, wobei die Empfindlichkeit hier bei allen Frequenzen konstant $\frac{5\text{V}}{\text{div}}$ war. Eine Division hat hier somit den Wert 5V.

$s_{U_{ss}}$ ergibt sich somit über

$$s_{U_{ss}} = \sqrt{\left(\frac{3 \cdot U_{ss}/100}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{10} \cdot \text{div}\right)^2} \quad (5.5)$$

Der Fehler auf die vom Voltmeter erhaltenen Spannungen setzt dabei auch aus der Eichtoleranz des Messgeräts und statistischen Ablesefehler zusammen, wobei wie bei den Fehlern auf die vom Oszilloskop abgelesenen Werte vorgegangen wird. Die Eichtoleranz des Geräts ist angegeben als $(0,8\% \pm 3 \text{ digits})$ und der Ablesefehler wird als 0,5 digits abgeschätzt.

Insgesamt beträgt der Fehler somit

$$s_{U_{DMM}} = \sqrt{\left(\frac{0,8 \cdot U/100 + 0,03}{\sqrt{3}}\right)^2 + (0,005)^2} \quad (5.6)$$

Des Weiteren sollte aus der am Oszilloskop gemessenen Periodendauer über 2.3 die Frequenz berechnet und mit der am Funktionengenerator eingestellten Frequenz verglichen werden.

Die eingestellten und berechneten Frequenzen können Tabelle 4 entnommen werden, wobei f die am Generator eingestellte Frequenz und f_{osz} die durch die Periodendauer berechnete Frequenz bezeichnet.

Signalform	f [kHz]	T [μ s]	s_T [μ s]	f_{osz} [kHz]	$s_{f_{osz}}$ [kHz]
Sinus	0,5014	1960	106	0,5102	0,0275
Sinus	2,004	500	22	2,000	0,087
Sinus	10,04	100	10	10,00	1,01
Rechteck	0,5015	1960	106	0,5102	0,0275
Rechteck	2,003	500	22	2,000	0,087
Rechteck	10,04	100	10	10,00	1,01
Dreieck	0,5015	2000	106	0,5000	0,0275
Dreieck	2,004	500	22	2,000	0,087
Dreieck	10,04	100	10	10,00	1,01

Tabelle 4: Angabe der eingestellten Frequenz sowie der aus der Periodendauer berechneten Frequenz

Da bei der Durchführung lediglich die halben Periodendauern gemessen wurden, musste erst durch Verdoppelung dieser die gesamte Periodendauer T berechnet werden. Der Fehler der vom Oszilloskop abgelesenen halben Periodendauer beträgt

$$s_{T/2} = \sqrt{\left(\frac{0,03 \cdot T/2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{10} \cdot \text{div}\right)^2}, \quad (5.7)$$

wobei die Werte für die Zeitablenkung Tabelle 5 entnommen werden können. Die Zeitablenkung wurde dabei lediglich für die verschiedenen Frequenzen verändert, für die verschiedenen Signalformen innerhalb einer Frequenz jedoch konstant gehalten.

Den Fehler auf die gesamte Periodendauer erhält man über

$$s_T = 2 \cdot s_{T/2}. \quad (5.8)$$

Der Fehler auf die Frequenz berechnet sich dann durch

$$s_f = \frac{s_T}{T} \cdot f = \frac{s_T}{T^2}. \quad (5.9)$$

Die Angabe der Frequenz am Funktionsgenerator wird als sehr präzise angenommen, sodass es hier keinen beitragenden Fehler gibt.

Frequenz	Zeitablenkung [$\frac{\mu\text{s}}{\text{div}}$]
0,5014	250
2,004	50
10,04	25

Tabelle 5: Angabe der Zeitablenkung

5.2 Teil B

5.2.1 (a) Schaltung, Aufbau und Erläuterung zur Schaltung

ohmscher Widerstand:

Bei einem ohmschen Widerstand ändert sich durch eine Verringerung der Frequenz die Amplituden des Stroms und der Spannung nicht. Auch bei einer Vergrößerung der Frequenz ist keine Änderung ersichtlich. Außerdem ist keine Phasenverschiebung zwischen der Spannungs- und der Stromkurve zu erkennen, weder bei geringerer noch bei höherer Frequenz.

Kondensator:

Beim Kondensator wird die Amplitude der Stromkurve bei geringerer Frequenz deutlich kleiner und bei größerer Frequenz wächst auch die Amplitude an. Die Spannungskurve verändert sich allerdings in beiden Fällen kaum. Es ist eine eindeutige Phasenverschiebung von ungefähr $\pi/2$ zwischen Strom und Spannung zu erkennen. Dabei liegt die Stromkurve auf dem Oszilloskop weiter links als die der Spannung und eilt damit der Spannung voraus.

Spule:

Bei der Spule ändert sich die Amplitude des Stroms erneut stark für verschiedene Frequenzen, allerdings wird sie dieses Mal bei geringerer Frequenz größer und bei größerer Frequenz kleiner. Im Gegensatz zum Kondensator ändert sich bei der Spule auch die Amplitude der Spannungskurve. Sie steigt bei größerer Frequenz an und wird bei geringerer Frequenz kleiner. Die Amplitude der Spannung verändert sich dabei jedoch deutlich weniger als die des Stroms. Bei diesem Bauteil tritt erneut eine Phasenverschiebung zwischen Spannungs- und Stromkurve auf. Hier liegt die Stromkurve nach rechts verschoben. Demnach läuft die Spannung dem Strom voraus bei einer Spule.

5.2.2 (b) Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom- und Spannungsmessung

Ohmscher Widerstand

Zuerst wurde mithilfe eines Digitalmultimeters der Wert des Widerstand eines einfachen ohmschen Widerstands bestimmt. Dieser hat den Wert

$$R = (270 \pm 9)\Omega, \quad (5.10)$$

wobei sich die Unsicherheit aus dem systematischen Fehler des Multimeters sowie dem statistischen Ablesefehler zusammensetzt. Diese wird über

$$s_R = \sqrt{\frac{0,8 \cdot R/100 + 1\text{digit}^2}{\sqrt{3}} + 0,5\text{digits}^2} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot R/100 + 10^2}{\sqrt{3}} + 5^2} \quad (5.11)$$

bestimmt.

Für drei unterschiedliche Frequenzen wurden Spannung und indirekt der Strom gemessen. Da dabei jeweils die doppelte Amplitude gemessen wurde, muss zur Berechnung der Impedanz lediglich die Hälfte der Spannung verwendet werden, da diese der einfachen Amplitude entspricht. Die Stromstärke muss dabei über

$$I_m = \frac{U_m/2}{R_m} \quad (5.12)$$

berechnet werden, wobei der Widerstand den Wert $R_m = 10\Omega$ hat und als präzise angenommen wird, sodass er nichts zum Fehler auf die Stromstärke beiträgt.

Der Fehler auf den Strom kann somit über

$$s_{I_m} = \frac{s_{U_m}}{2R_m} \quad (5.13)$$

ermittelt werden. Der Fehler auf U_m ist dabei über den Fehler des Oszilloskops und dem Ablesefehler, sodass man

$$S_{U_m} = \sqrt{\left(\frac{0,03 \cdot U_m}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{10} \cdot \text{div}\right)^2} \quad (5.14)$$

erhält.

Der Fehler auf die zusätzlich gemessene Spannung U_x des Widerstands R_x ergibt sich analog dazu.

Die Empfindlichkeiten wurden dabei für beide Kurven konstant gehalten. Für U_x war diese $\frac{1V}{\text{div}}$ und für U_m betrug sie $\frac{50\text{mV}}{\text{div}}$.

Wie im Versuchsteil A wird außerdem aus der gemessenen halben Periodendauer $T/2$ die gesamte Periodendauer T sowie die Frequenz f berechnet, wobei dazu analog vorgegangen wird. Auch die Fehler werden auf die selbe Weise berechnet.

Die beiden Kurven haben dabei keine Phasenverschiebung.

Zuletzt wird aus U_x und dem vorher berechneten Strom I_m die Impedanz über

$$Z_R = \frac{U_R/2}{I_m} \quad (5.15)$$

berechnet, wobei auch hier der gemessene spitze-spitze Wert halbiert werden muss.

Der Fehler der Impedanz kann dabei über

$$s_{Z_R} = \sqrt{\left(\frac{s_{U_R/2}}{U_R/2}\right)^2 + \left(\frac{s_{I_m}}{I_m}\right)^2} \quad (5.16)$$

ermittelt werden.

Bei einem ohmschen Widerstand entspricht dabei die Impedanz direkt dem Widerstand R_x .

Alle gemessenen und berechneten Werte können Tabelle 6 und 7 entnommen werden.

f_{gen} [kHz]	U_R [V]	U_m [mV]	I_m [mA]
1,01	$4,76 \pm 0,22$	$168,00 \pm 10,41$	$8,40 \pm 0,52$
3,01	$4,92 \pm 0,22$	$170,00 \pm 10,42$	$8,50 \pm 0,52$
10,04	$4,92 \pm 0,22$	$170,00 \pm 10,42$	$8,50 \pm 0,52$

Tabelle 6: Spannung und Strom des ohmschen Widerstands bei verschiedenen Frequenzen

$T/2$ [μs]	T [μs]	f [kHz]	Z [k Ω]	Zeitabl. [$\mu\text{s}/\text{div}$]
$484,00 \pm 21,69$	$968,00 \pm 43,37$	$1,03310 \pm 0,00005$	$0,28 \pm 0,02$	100,00
$166 \pm 10,41$	$332 \pm 20,81$	$3,01200 \pm 0,00019$	$0,29 \pm 0,02$	50,00
$51,2 \pm 2,19$	$102,4 \pm 4,38$	$9,76560 \pm 0,00042$	$0,29 \pm 0,02$	10,00

Tabelle 7: Periodendauer und Impedanz des ohmschen Widerstands bei verschiedenen Frequenzen

Aus den Widerstandswerten für die unterschiedlichen Frequenzen wird über

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i/s_i^2)}{\sum_{i=1}^n (1/s_i^2)} \quad (5.17)$$

das gewichtete Mittel berechnet, dessen Fehler man mit

$$s_{\bar{R}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1/s_i^2)}} \quad (5.18)$$

erhält.

Der Mittelwert des Widerstands ist somit

$$\boxed{R_x = (287 \pm 13)\Omega} . \quad (5.19)$$

Kondensator

Beim Kondensator wurde analog zum einfachen Widerstand vorgegangen. Alle Größen und Fehler berechnen sich analog.

Die jeweilige Empfindlichkeit der beiden Spannungsverläufe sowie die Zeitablenkung können in Tabelle 8 eingesehen werden.

Frequenz [Hz]	Zeitablenkung [$\frac{\mu s}{div}$]	Empfindlichkeit U_R [$\frac{V}{div}$]	Empfindlichkeit U_m [$\frac{mV}{div}$]
1008	100	1	20
3009	50	1	50
10040	10	1	100

Tabelle 8: Angabe der Empfindlichkeiten und der Zeitablenkung

Zusätzlich wurde hierbei die zeitliche Verschiebung δt abgelesen. Dazu wurde die Anzahl der Divisions zwischen den beiden Nulldurchgängen der sinus-Kurven gezählt und mit der Zeitablenkung multipliziert. Daraus wurde über

$$\varphi = 2\pi \cdot f \cdot \delta t \quad (5.20)$$

der Winkel in Bogenmaß berechnet, der über

$$\varphi_{deg} = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \varphi_{rad} \quad (5.21)$$

in Gradmaß umgerechnet werden kann.

Den Fehler auf φ_{rad} erhält man über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$s_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial f} \cdot s_f\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta t} \cdot s_{\delta t}\right)^2} = \sqrt{(2\pi \delta t \cdot s_f)^2 + (2\pi f \cdot s_{\delta t})^2}. \quad (5.22)$$

Der Fehler auf $s_{\varphi_{deg}}$ ergibt sich dann über

$$s_{\varphi_{deg}} = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot s_{\varphi_{rad}}. \quad (5.23)$$

Die Impedanz Z_C und ihr Fehler s_{Z_C} wurden auf die selbe Weise wie im Abschnitt zuvor berechnet.

Um daraus die Kapazität C des Kondensators zu erhalten, wird Gleichung 2.5 nach C umgestellt, sodass diese über

$$C = \frac{1}{\omega Z_C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (5.24)$$

ermittelt werden kann.

Für die hier über die Kreisfrequenz ω eingehende Frequenz f wird dabei die auf dem Funktionsgenerator angezeigt Frequenz verwendet, die keinen beitragenden Fehler hat. Für die Berechnung von φ dagegen wurde die sich über die Periodendauer ergebende Frequenz verwendet, da die Messung der Periodendauer und die der zeitlichen Verschiebung zusammen durchgeführt

wurden, sodass diese Werte zusammenpassen.

Die Unsicherheit der Kapazität berechnet sich somit lediglich aus der Unsicherheit der Impedanz über

$$s_C = \frac{1}{2\pi f Z_C^2} \cdot s_{Z_C}. \quad (5.25)$$

Alle gemessenen und berechneten Werte können Tabelle 9, 10 und 11 entnommen werden.

f [Hz]	U_R [V]	s_{U_R} [V]	U_m [mV]	s_{U_m} mV	I_m [mA]	s_{I_m} [mA]
1008	5,88	0,22	44	4	2,2	0,2
3009	5,60	0,22	156	10	7,8	0,5
10040	5,36	0,22	404	21	20,1	1,1

Tabelle 9: Spannung und Strom des Kondensators für verschiedene Frequenzen

$\frac{T}{2}$ [μ s]	$s_{\frac{T}{2}}$ [μ s]	T [μ s]	s_T [μ s]	f [Hz]	s_f [Hz]	δt [μ s]	$s_{\delta t}$ [μ s]	φ [rad]	s_φ [rad]
496,0	21,8	992,0	43,5	1008,1	44,2	248	20	1,57	0,15
168,0	10,4	336,0	20,8	2976,2	184,5	84	10	1,57	0,21
50,8	2,2	101,6	4,4	9842,5	423,3	24	2	1,48	0,14

Tabelle 10: Periodendauern und Frequenzen sowie zeitliche Verschiebung und Phase des Kondensators

Z [Ω]	s_Z [Ω]	C [μ s Ω]	s_C [μ s Ω]
1336	134	0,118	0,012
359	28	0,147	0,011
133	9	0,120	0,008

Tabelle 11: Impedanz und Kapazität des Kondensators

Die über das gewichtete Mittel, gegeben durch Gleichung 5.17 und 5.18, berechnete Kapazität mit Unsicherheit hat den Wert

$$C = (1,26 \pm 0,06) \cdot 10^{-7} \text{F}. \quad (5.26)$$

Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Kurven kann für die unterschiedlichen Frequenzen Tabelle 12 entnommen werden.

Frequenz [kHz]	Phase [rad]	Phase [Grad]
0,5014	$1,57 \pm 0,15$	90 ± 8
2,004	$1,57 \pm 0,21$	90 ± 12
10,04	$1,48 \pm 0,14$	85 ± 8

Tabelle 12: Phasenverschiebung von Strom und Spannung beim Kondensator

Spule

Hier wird analog zum Kondensator vorgegangen. Die gemessenen und berechneten Werte können Tabelle 14 und 15 entnommen werden, die Empfindlichkeiten sowie die zeitliche Ablenkung ist in Tabelle 13 genannt.

Frequenz [Hz]	Zeitablenkung [$\frac{\mu s}{div}$]	Empfindlichkeit U_R [$\frac{V}{div}$]	Empfindlichkeit U_m [$\frac{mV}{div}$]
1008	100	1	100
3005	50	1	100
10030	10	1	50

Tabelle 13: Angabe der Empfindlichkeiten und der Zeitablenkung

f [Hz]	U_R [V]	s_{U_R} [V]	U_m [mV]	s_{U_m} mV	I_m [mA]	s_{I_m} [mA]
1008	3,44	0,21	432,00	21,35	21,6	1,1
3005	4,27	0,21	316,00	20,74	15,8	1,0
10030	4,44	0,21	128,00	10,24	6,4	0,5

Tabelle 14: Spannung und Strom der Spule für verschiedene Frequenzen

$\frac{T}{2}$ [μs]	$s_{\frac{T}{2}}$ [μs]	T [μs]	s_T [μs]	f [Hz]	s_f [Hz]	δt [μs]	$s_{\delta t}$ [μs]	φ [rad]	s_φ [rad]
492,0	21,7	984,0	43,5	1016,3	44,9	90	20	0,57	0,13
166,0	10,4	332,0	20,8	3012,0	188,8	55	10	1,04	0,20
48,0	2,2	96,0	4,3	10416,7	470,0	20	2	1,31	0,15

Tabelle 15: Periodendauern und Frequenzen sowie zeitliche Verschiebung und Phase der Spule

Die Impedanz einer Spule lässt sich über Gleichung 2.6 bestimmen.

Mithilfe von Gleichung 2.7 und 2.8 können damit der ohmsche Widerstand und die Induktivität der Spule berechnet werden. Dabei wird 2.8 nach R_L aufgelöst und in Gleichung 2.7 eingesetzt. Dies führt zu einem Ausdruck für die Induktivität von

$$L = \frac{Z_{R,L} |\sin(\varphi)|}{\omega}, \quad (5.27)$$

der berechnet werden kann. Dies wird dann in Gleichung 2.7 eingesetzt, um den ohmschen Widerstand zu berechnen:

$$R = \frac{\omega L}{\tan(\varphi)}. \quad (5.28)$$

Die Unsicherheit der Induktivität erhält man durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$s_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial Z} \cdot s_Z\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \cdot s_\varphi\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(\varphi)}{\omega} \cdot s_Z\right)^2 + \left(\frac{Z \cos(\varphi)}{\omega} s_\varphi\right)^2} \quad (5.29)$$

und die des ohmschen Widerstandanteils über

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L} \cdot s_L\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \cdot s_\varphi\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\tan(\varphi)} \cdot s_L\right)^2 + \left(-\frac{\omega L}{\sin(\varphi)^2} \cdot s_\varphi\right)^2}. \quad (5.30)$$

Die darüber berechneten Werte sowie die Impedanzen können Tabelle 16 entnommen werden.

Z [Ω]	s_Z [Ω]	L [s Ω]	s_L [s Ω]	R [Ω]	s_R [Ω]
79,6	6,23	0,0068	0,0014	66,9	24,0
135,1	11,14	0,0062	0,0009	68,4	33,0
346,9	32,41	0,0053	0,0005	90,0	53,0

Tabelle 16: Impedanz, Induktivität und ohmscher Widerstand einer Spule

Wie in den vorherigen Abschnitten wird über das gewichtete Mittel der Mittelwert bestimmt. Für die Induktivität ergibt sich so

$$L = (0,0057 \pm 0,0004) \text{ s}\Omega \quad (5.31)$$

und für den ohmschen Widerstand der Spule

$$R = (70,1 \pm 18,2) \Omega . \quad (5.32)$$

Der zum Vergleich über das Multimeter gemessene Widerstand hat den Wert

$$R = (51,7 \pm 0,4) \Omega, \quad (5.33)$$

wobei der Fehler sich über

$$s_R = \sqrt{\frac{0,8 \cdot R/100 + 3\text{digits}^2}{\sqrt{3}} + 0,5\text{digits}^2} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot R/100 + 0,3^2}{\sqrt{3}} + 0,05^2} \quad (5.34)$$

berechnen lässt.

Die Phasenverschiebungen zwischen der Strom- und der Spannungskurve können Tabelle 17 entnommen werden.

Frequenz [kHz]	Phase [rad]	Phase [Grad]
0,5014	$0,57 \pm 0,13$	33 ± 8
2,004	$1,04 \pm 0,20$	60 ± 12
10,04	$1,31 \pm 0,15$	75 ± 8

Tabelle 17: Phasenverschiebung von Strom und Spannung bei einer Spule

Verlauf der Impedanz und der Phase

Für alle Bauelemente lässt sich nun die Impedanz über die Frequenz auftragen. Dies geschieht in einem doppellogarithmischen Diagramm und ist in Abbildung 6 zu sehen.

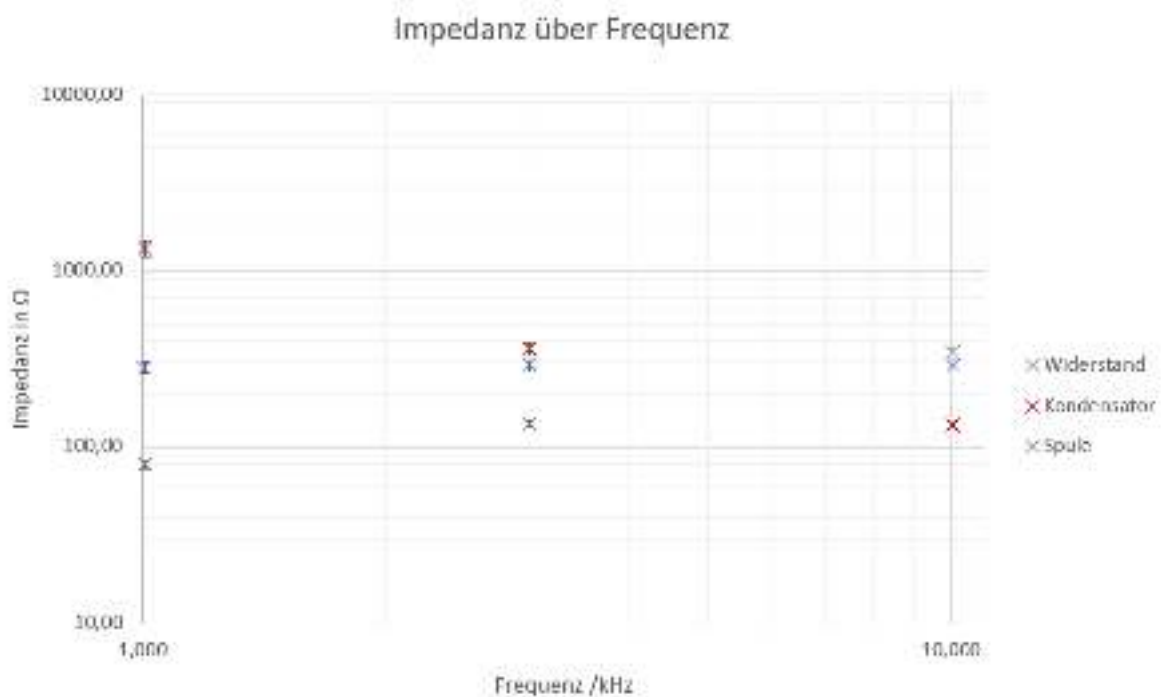


Abbildung 6: Impedanz aller Bauelemente über die Frequenz aufgetragen

Die Phase wird dabei für alle Bauelemente linear über die logarithmisch aufgetragene Frequenz eingezeichnet, was in Abbildung 7 eingesehen werden kann.

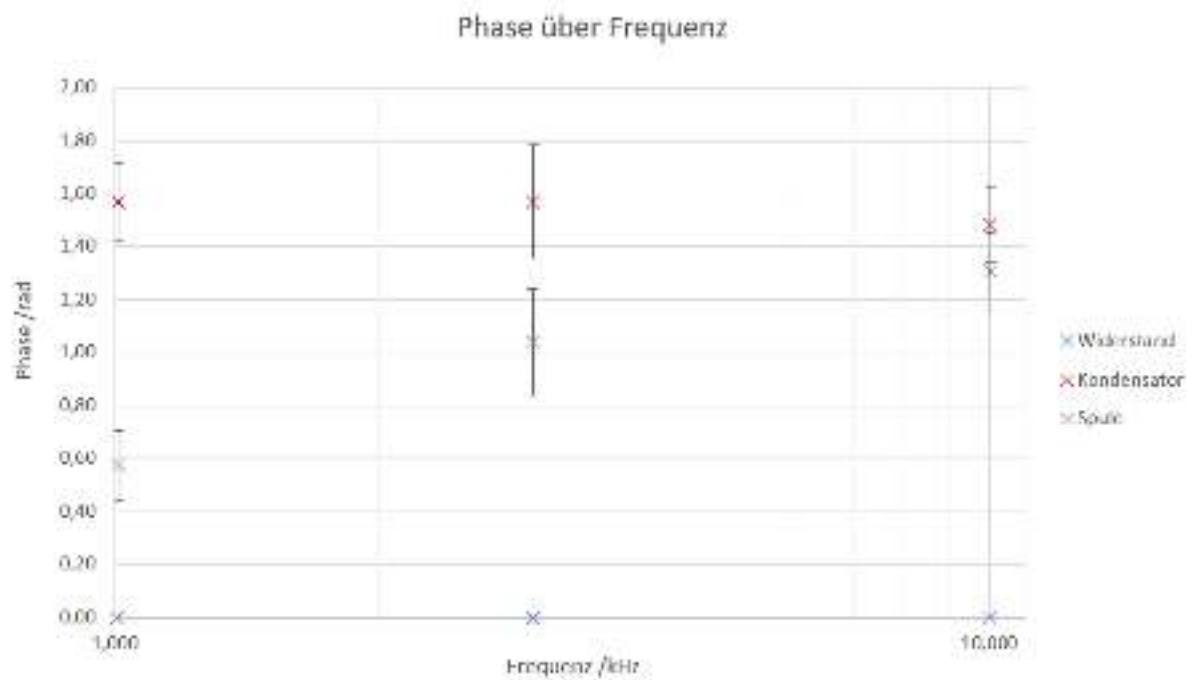


Abbildung 7: Phase aller Bauelemente über die Frequenz aufgetragen

6 Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Teil A

Für die sinusförmige Spannung ergibt sich für die eingestellte Frequenz von 0,5014kHz am Oszilloskop eine effektive Spannung von

$$U_{eff} = (4,2 \pm 0,4)V \quad (6.1)$$

und am Digital-Multimeter

$$U_{eff} = (4,2 \pm 0,1)V. \quad (6.2)$$

Die beiden Werte entsprechen sich innerhalb des einfachen Fehlerbereichs. Für das Rechtecksignal erhält man für dieselbe Frequenz am Oszilloskop

$$U_{eff} = (6,0 \pm 0,4)V \quad (6.3)$$

und am DMM

$$U_{eff} = (6,7 \pm 0,1)V. \quad (6.4)$$

Die beiden Werte stimmen demnach in einer 2σ -Umgebung miteinander überein. Zuletzt ist der Wert für die Dreiecksspannung am Oszilloskop

$$U_{eff} = (3,5 \pm 0,4)V \quad (6.5)$$

und mit dem DMM

$$U_{eff} = (3,3 \pm 0,1)V. \quad (6.6)$$

Diese Ergebnisse stimmen innerhalb des einfachen Fehlerbereichs überein. Für die nächste Frequenz von 2,004kHz ist der Wert für eine sinusförmige Spannung am Oszilloskop

$$U_{eff} = (4,2 \pm 0,4)V \quad (6.7)$$

und am Digital-Multimeter

$$U_{eff} = (4,0 \pm 0,1)V. \quad (6.8)$$

Die beiden Werte stimmen innerhalb des einfachen Fehlerbereichs miteinander überein. Für das Rechtecksignal ergibt sich am Oszilloskop

$$U_{eff} = (5,9 \pm 0,4)V \quad (6.9)$$

und am DMM

$$U_{eff} = (6,9 \pm 0,1)V. \quad (6.10)$$

Die bestimmten Werte stimmen innerhalb einer 3σ -Umgebung miteinander überein. Zuletzt erhält man beim Dreieckssignal über das Oszilloskop

$$U_{eff} = (3,5 \pm 0,4)V \quad (6.11)$$

und über das Digital-Multimeter

$$U_{eff} = (3,2 \pm 0,1)V. \quad (6.12)$$

Damit entsprechen die beiden Werte einander innerhalb des einfachen Fehlerbereichs. Die letzte Frequenz, bei der gemessen wurde beträgt 10,04kHz. Für die sinusförmige Spannung ergibt sich am Oszilloskop

$$U_{eff} = (4,2 \pm 0,4)V \quad (6.13)$$

und am Digital-Multimeter

$$U_{eff} = (3,6 \pm 0,1)V. \quad (6.14)$$

Diese Werte stimmen innerhalb einer 2σ -Umgebung miteinander überein. Für das rechteckige Signal erhält man am Oszilloskop

$$U_{eff} = (6,0 \pm 0,4)V \quad (6.15)$$

und über das DMM

$$U_{eff} = (7,5 \pm 0,1)V. \quad (6.16)$$

Damit entsprechen sich die Werte innerhalb einer 4σ -Umgebung. Zuletzt ergibt sich für ein Dreieckssignal am Oszilloskop

$$U_{eff} = (3,5 \pm 0,4)V \quad (6.17)$$

und am Multimeter

$$U_{eff} = (2,6 \pm 0,1)V. \quad (6.18)$$

Diese Werte stimmen innerhalb einer 3σ -Umgebung miteinander überein.

Dabei fällt auf, dass bei der höchsten Frequenz die Werte am schlechtesten übereinstimmen. Dies könnte daraus folgen, dass das Digital-Multimeter für Wechselspannungen nur für einen Bereich von 40 – 400 Hz gedacht ist und man deshalb bei zu hohen Frequenzen verfälschte Werte erhält. Für geringere Frequenzen sind korrekte Messungen mit dem Digital-Multimeter im Rahmen unserer Messreihen allerdings gut möglich.

Für die Frequenzen erhält man die in Tabelle 18 enthaltenen Werte:

Signalform	f [kHz]	f_{osz} [kHz]
Sinus	0,5014	$0,5102 \pm 0,0275$
Sinus	2,004	$2,000 \pm 0,087$
Sinus	10,04	$10,00 \pm 1,01$
Rechteck	0,5015	$0,5102 \pm 0,0275$
Rechteck	2,003	$2,000 \pm 0,087$
Rechteck	10,04	$10,00 \pm 1,01$
Dreieck	0,5015	$0,5000 \pm 0,0275$
Dreieck	2,004	$2,000 \pm 0,087$
Dreieck	10,04	$10,00 \pm 1,01$

Tabelle 18: Angabe der eingestellten Frequenz sowie der berechneten Frequenz mit Unsicherheit

Alle berechneten Frequenzen stimmen innerhalb des einfachen Fehlerbereichs überein. Damit ist eine Berechnung der Frequenz über das Oszilloskop sinnvoll und ergibt konsistente Werte.

6.2 Teil B.1

Bei einem ohmschen Widerstand sind weder Spannung noch Strom frequenzabhängig.

Beim Kondensator dagegen ist der Strom deutlich von der Frequenz abhängig und steigt bei höherer Frequenz. Die Spannung bleibt dabei frequenzunabhängig.

Zuletzt sind Spannung und Strom bei der Spule beide von der Frequenz abhängig, der Strom, der mit höherer Frequenz sinkt, allerdings stärker als die Spannung, die mit höherer Frequenz steigt.

Eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom treten nur bei Kondensator und Spule auf. Beim Kondensator eilt der Strom der Spannung voraus, bei der Spule ist er zur Spannung verzögert.

6.3 Teil B.2

Widerstand

Der über die Impedanz bestimmte Widerstand des ohmschen Widerstands hat den Wert

$$R_x = (287 \pm 13) \Omega. \quad (6.19)$$

Dieser stimmt innerhalb einer 1σ - Umgebung mit dem durch das Multimeter bestimmten Wert von

$$R = (270 \pm 9) \Omega \quad (6.20)$$

überein. Die Phasenverschiebung zwischen der Strom- und der Spannungskurve war dabei 0, Strom und Spannung bei einem ohmschen Widerstand haben ihre Maxima somit an derselben Stelle.

Auch die Amplituden verändert sich nicht, sodass der Verlauf der Spannungs- und Stromkurve bei einem ohmschen Widerstand nicht frequenzabhängig ist.

Kondensator

Die berechnete Kapazität des Kondensators hat den Wert

$$C = (1,26 \pm 0,06) \cdot 10^{-7} \text{F}. \quad (6.21)$$

Die Phasen zwischen den beiden Kurven können in Tabelle 19 eingesehen werden.

Frequenz [kHz]	Phase [rad]	Phase [Grad]
0,5014	$1,57 \pm 0,15$	90 ± 8
2,004	$1,57 \pm 0,21$	90 ± 12
10,04	$1,48 \pm 0,14$	85 ± 8

Tabelle 19: Phasenverschiebung von Strom und Spannung beim Kondensator

Aus den Messergebnissen ist ersichtlich, dass die Amplitude der Stromstärke für größere Frequenzen zunimmt. Der Wert der Spannung verändert sich dagegen kaum.

Betrachtet man die Phasenverschiebung, so kann die qualitative Beobachtung aus dem vorherigen Aufgabenteil bestätigt werden, dass beim Kondensator der Strom der Spannung vorausseilt. Die Phasenverschiebung ist hier für die unterschiedlichen Frequenzen gleich, sodass gesagt werden kann, dass die Phasenverschiebung von Strom und Spannung beim Kondensator frequenzunabhängig ist und 90° beträgt.

Spule

Die hier bestimmte Induktivität der Spule beträgt

$$L = (0,0057 \pm 0,0004) \text{s}\Omega . \quad (6.22)$$

Der ohmsche Anteil hat den Wert

$$R = (70,1 \pm 18,2) \Omega \quad (6.23)$$

und stimmt damit innerhalb eines zweifachen Fehlerintervalls mit dem über das Digitalmultimeter bestimmten Widerstand von

$$R = (51,7 \pm 0,4) \Omega \quad (6.24)$$

überein. Diese Abweichung lässt sich unter anderem dadurch erklären, dass die über den Widerstand R_m und die Spannung U_m bestimmte Stromstärke äußerst schwer abzulesen war, da dieser ziemlich große Schwankungen innerhalb eines Bereichs von ungefähr 1V aufwies und so die Amplituden und die Phasenverschiebungen nur sehr ungenau abgelesen werden konnten.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung für die verschiedenen Frequenzen kann dabei Tabelle 20 entnommen werden.

Frequenz [kHz]	Phase [rad]	Phase [Grad]
0,5014	$0,57 \pm 0,13$	33 ± 8
2,004	$1,04 \pm 0,20$	60 ± 12
10,04	$1,31 \pm 0,15$	75 ± 8

Tabelle 20: Phasenverschiebung von Strom und Spannung bei einer Spule

Es kann somit die qualitative Beobachtung, dass der Strom im Vergleich zur Spannung verzögert ist, bestätigt werden. Die Phasendifferenz nimmt dabei für größere Frequenzen zu und ist somit frequenzabhängig.

Betrachtet man die Amplituden, kann verifiziert werden, dass die Amplitude der Stromstärke für höhere Frequenzen abnimmt während die der Spannung bei höheren Frequenzen ansteigt.

Verlauf der Impedanz und Phase

Beim Auftragen der Impedanz über der Frequenz in einem doppellogarithmischen Diagramm sowie beim Einzeichnen der Phase über der Frequenz in einem semilogarithmischen Diagramm fällt vor allem auf, dass keine konsistente Aussage über den Verlauf getroffen werden kann, da lediglich drei Messwerte pro Messreihe aufgenommen wurden. Dies ist nicht ausreichend, um Aussagen über deren Verlauf treffen zu können.

7 Literatur

- [1] *Physiklabor für Anfänger*innen Teil 2, Teil A, Versuchs 50, S.84-92.*

8 Anhang

Herleitung der Zusammenhänge zwischen Amplituden, Effektivwert und Betrags-Mittelwert

Sinusförmiges Signal

Die durch die effektiven Werte für die Spannung und den Strom Leistung soll nach Definition der mittleren Leistung bei Gleichspannung bei gleicher Stärke entsprechen. Dies führt zu

$$\overline{P} = U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \, dt \quad (8.1)$$

Dies ergibt sich mit $I = U/R$ zu

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_0^2 \cos^2 \omega t}{R} \, dt = \frac{U_0^2}{2R}. \quad (8.2)$$

Dieser Zusammenhang ergibt sich daraus, dass das zeitliche Mittel des $\cos^2$ genau $1/2$ entspricht. Daraus folgt über

$$U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{R} \quad (8.3)$$

für den Zusammenhang zwischen U_0 und U_{eff}

$$\frac{U_0^2}{2R} = \frac{U_{eff}^2}{R} \quad (8.4)$$

$$\Leftrightarrow U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (8.5)$$

Für den Zusammenhang zwischen der Amplitude und dem Betrags-Mittelwert wird folgender Ansatz verwendet:

$$|\overline{U}| = \frac{1}{T} \cdot 2 \int_0^{T/2} U \, dt = \frac{U_0}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t = \frac{U_0}{T} \cdot 2 \left[-\cos \omega t \cdot \frac{1}{\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{2U_0}{\pi}. \quad (8.6)$$

Dabei wurde, um den Betrags-Mittelwert zu erhalten, der Betrag des $\cos$ verwendet.

Rechteckiges Signal

Die Zusammenhänge zwischen Betragswert, Effektivwert und Betrags-Mittelwert werden erneut über dieselben Zusammenhänge berechnet.

Demnach gilt

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{U_0^2}{R} \, dt \right) = \frac{1}{T} \cdot \frac{U_0^2}{R} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = \frac{U_0^2}{R}. \quad (8.7)$$

Daraus folgt wiederum

$$\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \quad (8.8)$$

$$\Leftrightarrow U_{eff} = U_0. \quad (8.9)$$

Für den Betrags-Mittelwert gilt

$$|\overline{U}| = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \, dt = U_0. \quad (8.10)$$

Dreieckiges Signal

Analog zu den vorherigen Teilen berechnet sich der Zusammenhang zwischen U_0 und U_{eff} über

$$\bar{P} = \frac{4}{TR} \int_0^{T/4} \left(\frac{4U_0}{T} \cdot t \right)^2 dt = \frac{4}{RT} \left[\frac{4^2 U_0^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{T/4} = \frac{U_0^2}{3R} \quad (8.11)$$

$$\Leftrightarrow U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}. \quad (8.12)$$

Dabei entspricht $\frac{4U_0}{T} \cdot t$ der Geradengleichung in dem betrachteten Abschnitt des Dreiecks. Eine Periode des Dreiecksignals wird dabei in vier gleich große Dreiecke aufgeteilt. Man kann dafür vier gleiche Integrale verwenden, da die Fläche jedes einzelnen kleinen Dreiecks gleich ist.

Für den Betrags-Mittelwert folgt dementsprechend

$$|\bar{U}| = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \frac{4U_0}{T} \cdot t dt = \frac{4}{T} \left[\frac{4U_0}{2T} \cdot t^2 \right]_0^{T/4} = \frac{U_0}{2}. \quad (8.13)$$

Sägezahnförmiges Signal

Für diese Herleitung wird die Periode des Signals in zwei gleich große Bereiche, die zwei kongruente Dreiecke darstellen, aufgeteilt. Dabei wird U wieder durch die passende Geradengleichung $U = \frac{2U_0}{T} \cdot t$ dargestellt. Dadurch ergibt sich

$$\bar{P} = \frac{2}{RT} \int_0^{T/2} \left(\frac{2U_0}{T} \cdot t \right)^2 dt = \frac{2}{RT} \left[\frac{2^2 U_0^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{T/2} = \frac{U_0^2}{3R} \quad (8.14)$$

$$\Leftrightarrow U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}. \quad (8.15)$$

Der Zusammenhang zum Betragsmittelwert ergibt sich wiederum mit

$$|\bar{U}| = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{2U_0}{T} \cdot t dt = \frac{U_0}{2}. \quad (8.16)$$

Induktiver Widerstand einer Spule

Für eine Spule gilt allgemein

$$U = L \cdot \dot{I}. \quad (8.17)$$

Setzt man nun für die Spannung $U = \sin(\omega t)$ und für die Stromstärke $I = \cos(\omega t)$ ein, dann erhält man durch Differenzieren

$$\frac{dU}{dt} = L \cdot \frac{d\dot{I}}{dt} \quad (8.18)$$

$$\Rightarrow -\omega U_0 \cos(\omega t) = -L\omega^2 I_0 \sin(\omega t) \quad (8.19)$$

$$\Rightarrow U_0 = \omega L I_0. \quad (8.20)$$

Die Spannung und die Stromstärke unterscheiden sich beim rein induktiven Widerstand um einen bestimmten Faktor bei der Amplitude und bei der Phase um $\pi/2$. Dies ist an folgendem Zusammenhang zu sehen:

$$U = U_0 \sin(\omega t) \quad (8.21)$$

$$\dot{U} = I = U_0 \cdot \omega \cos(\omega t) = I_0 \sin(\omega t - \pi/2) \quad (8.22)$$

Versuch 5C

Voltmeter UT 51 Multimeter Bereich: (10-400) Hz

2.3.2018

Fehler bei Wechselst. 20V, 200V
Innenwiderstand 10 M Ω $\pm (0,8\% \text{ u. H.} + 3 \text{ digits})$ ZeitSpann mit CursorAbleserfehler: $\pm 0,5 \text{ digits}$

Frequenzgenerator		Oszilloskop		DMM
Frequenz f_{kHz}	U_{eff}/V	U_{eff}/V	$T_s/\mu s$	U_{eff}/V
① 2,004	11,7	12,00	250 μs	3,98
② 0,5014	11,7	12,00	980 μs	4,17
③ 10,04	11,7	12,00	50	3,55

$$\left. \begin{array}{l} V: \frac{5V}{\text{div}} \\ T: \frac{25\mu s}{\text{div}} \end{array} \right\} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} V: \frac{5V}{\text{div}} \\ T: \frac{25\mu s}{\text{div}} \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{array}{l} V: \frac{5V}{\text{div}} \\ T: \frac{25\mu s}{\text{div}} \end{array} \right\}$$

Rechteck

Frequenzgenerator		Oszilloskop		DMM
f/kHz	U_{eff}/V	U_{eff}/V	$T_s/\mu s$	U_{eff}/V
① 2,003	11,7	11,80	250 μs	6,86
② 0,5014	11,7	12,00	980	6,73
③ 10,04	11,7	12,00	50	7,49

Rechteck: 2. Gang
Fehler: ~~negativ~~Spannung = 0,2%
(Spannung Oszilloskop)Dreieck

Frequenzgenerator		Oszilloskop		DMM
f/kHz	U_{eff}/V	U_{eff}/V	$T_s/\mu s$	U_{eff}/V
① 2,004	11,7	12,00	25 μs	3,16
② 0,5015	11,7	12,20	1000	3,34
③ 10,04	11,7	12,20	50	2,63

Fehler Oszilloskop
39% aufwärts

Deutete für die Spannungen am Oszilloskop schwanken stark (insb. nahem Bereich von 1V)
-teilig syst. Fehler, da Cursor tendenziell weiter außen liegt

8.1 B1

$R_m = 10 \Omega$

$R_k = 0,27 k\Omega = 270 \Omega$

Bereich $24 \Omega - 28 \Omega$

Fehler: $\pm (0,5 \times \text{v. M.} + 1 \text{ digit})$

Ablesfehler: $\pm 0,5 \text{ digits}$

qualitative Beobachtung

* ohmscher Widerstand: Verhältnis von Strom und Spannung bleibt gleich, sie bleiben in Phase, Amplituden ändern sich nicht

* Kondensator: Amplitude des Stroms verändert sich bei Veränderung der Frequenz $\rightarrow$ wird größer bei gr. Frequenz
Spannung bleibt gleich,
Phase: Strom liegt um 90° / 90° links von Spannung (vorher)

* Spule: beide Amplituden ändern sich, werden größer für höhere Frequenz,
Spannung größer bei größerer Frequenz
Spannung ändert sich weniger als Strom
Phase: Strom ist rechts von Spannung

8.1 B2

Wider- stand	Generator	Oszilloskop				
	f / kHz	U _R / V	U _m / mV	T ₂ / μ s	Δt / μ s	
	1,005	4,76	148,0 165,0	484,0	0	$V_2 = \frac{50 \text{ mV}}{\text{div}}$ $V_1 = \frac{1 \text{ V}}{\text{div}}$ T: $\frac{1000 \text{ ns}}{\text{div}}$
	3,008	4,92	170,0	166,0	0	$V_1 = \frac{1 \text{ V}}{\text{div}}$ T: $\frac{500 \text{ ns}}{\text{div}}$
	10,04	4,92	170,0	51,2	0	$V_2 = \frac{50 \text{ mV}}{\text{div}}$ nur T anders: T: $\frac{100 \text{ ns}}{\text{div}}$
Kondensator	f / kHz	U _R / V	U _m / mV	T ₂ / μ s	Δt / μ s	
	10,04	5,36	404,0	50,8	$(-90^\circ) 2,4 \mu$	$V_1 = \frac{1 \text{ V}}{\text{div}}$ $V_2 = \frac{50 \text{ mV}}{\text{div}}$ (Strom links von U + P mit Wasser)
	3,009	5,60	156,0	168,0	$(-90^\circ) 1,68 \mu$	$V_1 = \frac{1 \text{ V}}{\text{div}}$ $V_2 = \frac{50 \text{ mV}}{\text{div}}$ T: $\frac{500 \text{ ns}}{\text{div}}$
	1,008	5,88	204,0 und 200 ausgespart	496,0	$(-90^\circ) 2,48 \mu$	$V_1 = \frac{1 \text{ V}}{\text{div}}$ $V_2 = \frac{50 \text{ mV}}{\text{div}}$ T: $\frac{1000 \text{ ns}}{\text{div}}$

Bereich 200 Ω

Spalte Ohmscher Widerstand 5%, 7% Fehler $\pm (0,5\% \text{ v.w.} + 3 \text{ digits})$					Absolut. G3 digits
f/Hz	U _z /V	U _m /mV	T _{1/2} /μs	df/μs	
1.008	3.44	432.0	492.0	2.4 μs	$V_1 = \frac{U_1}{U_2} \cdot V_2 = \frac{3.44}{4.27} \cdot 4.27$
3.003	4.27	316.0	166.0	1.1 μs	$T = \frac{T_1}{T_2} \cdot T_2 = \frac{492.0}{166.0} \cdot 166.0$
10.03	4.44	128.0	48.0	2.4 μs	$V_1 = \frac{U_1}{U_2} \cdot V_2 = \frac{3.44}{4.27} \cdot 4.27$

Fehler Oszilloskop 3%

Absoluter Oszilloskop: $\frac{1}{10}$ division (Skala etwas größer $\frac{2}{10}$ div)

VT 11. Bull