

# Versuch 53

Erzwungene elektrische Schwingungen

Protokoll des Anfänger-Praktikums II



Gruppe 14

Durchgeführt am  
05.03.2018



## Inhaltsverzeichnis

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Versuchsziel</b>                   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Physikalische Grundlagen</b>       | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Versuchsaufbau</b>                 | <b>5</b>  |
| <b>4</b> | <b>Versuchsdurchführung</b>           | <b>5</b>  |
| <b>5</b> | <b>Auswertung</b>                     | <b>7</b>  |
| <b>6</b> | <b>Zusammenfassung und Diskussion</b> | <b>18</b> |
| <b>7</b> | <b>Literatur</b>                      | <b>20</b> |
| <b>8</b> | <b>Anhang</b>                         | <b>21</b> |

## 1 Versuchsziel

In diesem Versuch wird ein Serienschwingkreis mit und ohne zusätzlichen Widerstand betrachtet. Das Ziel ist dabei die Betrachtung des Amplitudenverhältnisses der Spannung  $U_C$  am Kondensator und der Eingangsspannung  $U_a$  sowie die Untersuchung der Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Spannungen für einen Schwingkreis mit und ohne ohmschen Widerstand. Durch die grafische Auftragung der Spannungsverhältnisse soll die Resonanzfrequenz des beinahe ungedämpften, sowie die des gedämpften Systems abgelesen werden. Zusätzlich ist die Kapazität des Kondensators zu bestimmen.

Zuletzt gilt es, aus den dem Spannungsverhältnis einen Zusammenhang mit der Stromstärke herzustellen und diese ebenfalls grafisch darzustellen, um daraus die Dämpfungswiderstände zu ermitteln.

## 2 Physikalische Grundlagen

Beim elektrischen Schwingkreis handelt es sich um einen getriebenen, gedämpften Oszillator. Die zugehörige Differentialgleichung lässt sich über die an den einzelnen Bauteilen abfallende Spannung bestimmen und lautet:

$$U_a(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q, \quad (2.1)$$

wobei  $U_L$  die an der Spule abfallende Spannung,  $U_R$  die des Widerstands,  $U_C$  die am Kondensator gemessene Spannung sowie  $U_a$  die angelegte Spannung bezeichnet.  $L$  entspricht der Induktivität der Spule,  $C$  der Kapazität des Kondensators und  $R$  dem ohmschen Widerstand. Zur Bestimmung der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Systems wird der homogene, ungedämpfte Oszillator betrachtet. Durch Einsetzen eines Exponentialansatzes kommt man über die Differentialgleichung

$$0 = \ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q \text{ mit } \delta = \frac{R}{2L} \quad (2.2)$$

auf eine Eigenfrequenz von

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (2.3)$$

Die Resonanzfrequenz  $\omega_1$  des gedämpften Falls ergibt sich auf einem ähnlichen Weg zu

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{4L/C}}. \quad (2.4)$$

Zuletzt wird der getriebene Oszillator betrachtet, dessen Lösung schwieriger ist. Für die Resonanzfrequenz  $\omega_2$  erhält man hier einen Ausdruck von

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{2L/C}}. \quad (2.5)$$

Beim direkten Vergleich fällt auf, dass gilt:

$$\omega_0 > \omega_1 > \omega_2. \quad (2.6)$$

Die Resonanzmaxima der gedämpften Schwingung liegen vor dem der ungedämpften. Die Maxima der angetriebenen Schwingung liegen noch weiter vorne.

Die Impedanz  $Z_0$  für den Kondensator ist definiert als

$$Z_0(\omega) = \frac{U_{C0}}{I_0} = \frac{1}{\omega C}, \quad (2.7)$$

wodurch sich folgender Ausdruck für die Spannung  $U_{C0}$  am Kondensator ableiten lässt:

$$U_{C0}(\omega) = \frac{1}{\omega C} I_0(\omega). \quad (2.8)$$

Durch Umstellen und Erweitern mit  $U_{a0}$  erhält man somit

$$\frac{I_0}{U_{a0}} = \omega C \frac{U_{C0}}{U_{a0}}. \quad (2.9)$$

Für die maximale Amplitude  $I_0$  des Stroms erhält man durch Lösen der getriebenen, gedämpften DGL

$$I_0(t) = \omega C U_{C0}(\omega) = \frac{\omega U_{a0}}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}}. \quad (2.10)$$

Trifft man die Annahme  $\omega = \omega_0$  und formt die Gleichung um, dann ergibt sie sich zu

$$\frac{I_0}{U_{a0}} = \frac{1}{R}. \quad (2.11)$$

Die verwendeten Kreisfrequenzen  $\omega$  hängen mit der Frequenz  $f$  über

$$f = 2\pi\omega \quad (2.12)$$

zusammen.

Die Phasenverschiebung  $\varphi$  zweier gleichphasiger Kurven erhält man über

$$\varphi = 2\pi f \Delta t, \quad (2.13)$$

wobei  $\Delta t$  der abgelesene Abstand zwischen den beiden Nulldurchgängen ist.

### 3 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau setzt sich aus einem Funktionsgenerator, einem Oszilloskop mit zusätzlichem Tastknopf und Verbindungskabeln zusammen. Zusätzlich ist ein Steckbrett mit einer Spule, einem Widerstand, einem Kondensator sowie Kurzschlussstecker vorhanden. Zur Messung der Widerstände steht zusätzlich ein Digitalmultimeter zur Verfügung. Die Anordnung der Elemente kann Abbildung 1 entnommen werden.

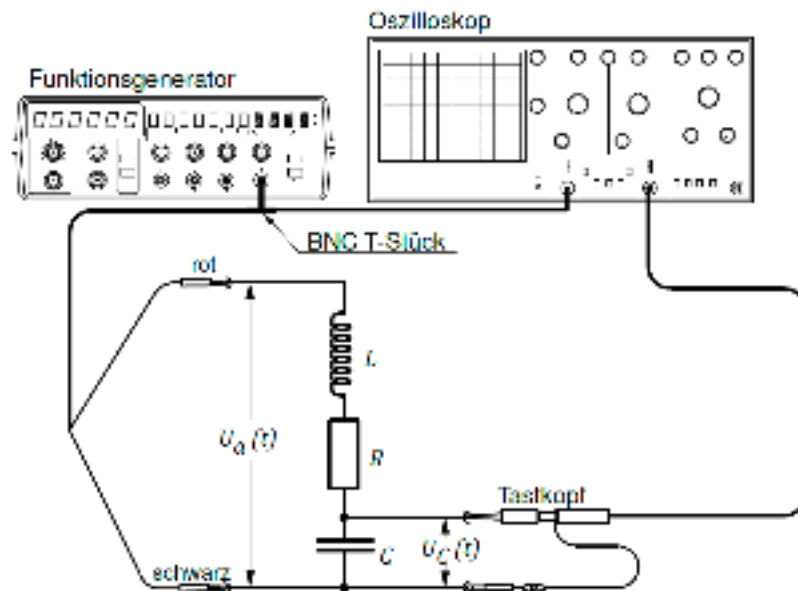


Abbildung 1: Versuchsanordnung mit Funktionsgenerator, Oszilloskop, Steckbrett und den Elementen eines Serienschaltkreises [1]

### 4 Versuchsdurchführung

Zuerst sollten mithilfe des Digitalmultimeters die Widerstände des ohmschen Widerstands und der Spule bestimmt werden. Das dafür verwendete Messgerät war das Voltcraft Green Multi-meter VC 98 mit einem eingestellten Messbereich von  $400\Omega$ . Zusätzlich wurde der angegebene Wert der Induktivität notiert, der  $L = 952\mu\text{H}$  betrug.

Anschließend wurde der Serienschwingkreis aufgebaut, wobei mithilfe des Tastkopfs die über dem Kondensator abfallende Spannung gemessen wurde und mithilfe eines Verbindungskabels zusätzlich die Anregerspannung auf das Oszilloskop übertragen wurde. Diese beiden Spannungsverläufe waren dann am Oszilloskop zu sehen.

Für die ersten beiden Messreihen wurde noch kein zusätzlicher Widerstand eingebaut, sodass hier ein nahezu ungedämpfter Oszillator vorliegt.

Zunächst sollte qualitativ die Resonanzfrequenz gesucht werden, für die die Amplitude der Kondensatorspannung ihr Maximum erreicht. Dies ist für die Durchführung der Messung relevant, da darauf geachtet werden muss, in der Nähe der Resonanzfrequenz eine kleinere Schrittweite zu verwenden.

Im ersten Messdurchgang wurden die Spannungsamplituden der Anregerspannung  $U_a$  und der Spannung am Kondensator  $U_C$  für unterschiedliche Frequenzen abgelesen. Dies geschah in einem Frequenzbereich von  $100\text{kHz}$  bis  $200\text{kHz}$ , wobei die Schrittweite nach außen hin erst einmal

10kHz betrug und nach innen hin immer kleiner wurde, bis um die Resonanzfrequenz mit einem Abstand von 1Hz gemessen wurde.

Dabei musste darauf geachtet werden, die Empfindlichkeit zu notieren, da die Amplitudenmaxima am Oszilloskop anhand der Kästchen abgelesen wurden. Es wurden dabei bei jedem Messwert die Amplitude nach unten und nach oben verglichen und aufgrund vollkommener Symmetrie nur die einfache Amplitude abgelesen und der Fehler darauf abgeschätzt.

Ebenfalls ohne den Zusatzwiderstand wurde danach die Phasenverschiebung der beiden Kurven für die unterschiedlichen Frequenzen gemessen. Dadurch wurde der Abstand zwischen den Nulldurchgängen der beiden Amplitudenverläufe abgelesen. Auch hier wurden die Schrittweiten so gewählt, dass sie um die Resonanzfrequenz wesentlich kleiner als für viel größere oder kleinere Frequenzen waren. Der Messbereich lag dabei etwa zwischen 110kHz bis 190kHz.

Da hier die Phasenverschiebung entlang der Zeitachse gemessen wurde, war es relevant, die am Oszilloskop eingestellte zeitliche Verschiebung zu notieren.

Anschließend wurde der zusätzliche Widerstand in den Serienschwingkreis eingebaut, sodass es sich nun um eine gedämpfte Schwingung handelt. Die Messung der Spannungsamplituden und der Phasenverschiebung wurden analog zum ungedämpften Fall wiederholt.

## 5 Auswertung

### a) Bestimmung der Eigenfrequenz und der Kapazität des Kondensators

Zuerst wird die Phasenverschiebung zwischen der angelegten Spannung  $U_a(t)$  und der am Kondensator abfallenden Spannung  $U_C(t)$  dadurch berechnet, dass die in Kästchen abgelesene Verschiebung mit der eingestellten Zeitablenkung multipliziert wird. Dies gibt die zeitliche Verschiebung in  $\mu s$  an und wird jeweils für den Messdurchgang mit und ohne zusätzlichen Widerstand durchgeführt.

Beim Fehler der vom Oszilloskop abgelesenen zeitlichen Verschiebung handelt es sich lediglich um den Ablesefehler. Der systematische Fehler des Oszilloskops ist dabei hier nicht relevant, da im Folgenden mit Verhältnissen zweier abgelesener Spannungen gearbeitet wird und sich deren systematische Fehler aufheben und sich eine systematische Verschiebung nicht auf das relative Verhältnis auswirkt.

Der Ablesefehler ist dabei  $s_{abl} = \frac{1}{10} \text{div}$ , wobei die Zeitablenkung nicht verändert wurde und somit kein Messbereichwechsel der Zeitachse vorkommt. Um die Phase  $\varphi$  zu erhalten wurde Gleichung 2.13 verwendet. Den Fehler darauf erhält man durch

$$s_\varphi = 2\pi f \cdot s_{\Delta t}. \quad (5.1)$$

Der vom Funktionsgenerator eingestellte Wert für die Frequenz wird dabei als exakt angenommen. Da die Frequenzen dort auf die 4. Nachkommastelle genau angegeben werden konnte, kann der statistische Ablesefehler, der 0,5 digits beträgt, vernachlässigt werden.

Die Messergebnisse sowie die berechnete Phasenverschiebung für den Schwingkreis ohne zusätzlichen Widerstand kann Tabelle 1 entnommen werden, die Werte für den Messdurchgang mit Widerstand sind in Tabelle 2 zu finden.

| $f$ [kHz] | $\Delta t$ [ $\mu s$ ] | $s_{\Delta t}$ [ $\mu s$ ] | Zeitabl. [ $\mu s/\text{div}$ ] | $\varphi$ [rad] | $s_\varphi$ [rad] |
|-----------|------------------------|----------------------------|---------------------------------|-----------------|-------------------|
| 110,0     | 0,10                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,07            | 0,03              |
| 124,0     | 0,13                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,10            | 0,04              |
| 134,0     | 0,20                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,17            | 0,04              |
| 139,0     | 0,28                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,24            | 0,04              |
| 143,0     | 0,38                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,34            | 0,04              |
| 147,0     | 0,60                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,55            | 0,05              |
| 149,0     | 0,85                   | 0,05                       | 0,5                             | 0,80            | 0,05              |
| 151,0     | 1,25                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,19            | 0,05              |
| 151,5     | 1,40                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,13            | 0,05              |
| 152,0     | 1,50                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,43            | 0,05              |
| 152,5     | 1,65                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,58            | 0,05              |
| 153,0     | 1,80                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,73            | 0,05              |
| 153,5     | 1,93                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,86            | 0,05              |
| 154,0     | 2,05                   | 0,05                       | 0,5                             | 1,98            | 0,05              |
| 155,0     | 2,25                   | 0,05                       | 0,5                             | 2,19            | 0,05              |
| 157,0     | 2,48                   | 0,05                       | 0,5                             | 2,44            | 0,05              |
| 159,0     | 2,63                   | 0,05                       | 0,5                             | 2,62            | 0,05              |
| 163,0     | 2,73                   | 0,05                       | 0,5                             | 2,78            | 0,05              |
| 167,0     | 2,75                   | 0,05                       | 0,5                             | 2,89            | 0,05              |
| 171,0     | 2,75                   | 0,05                       | 0,5                             | 2,95            | 0,05              |
| 181,0     | 2,65                   | 0,05                       | 0,5                             | 3,01            | 0,06              |
| 190,0     | 2,55                   | 0,05                       | 0,5                             | 3,04            | 0,06              |

Tabelle 1: Relevante Werte für die Phasenverschiebung ohne ohmschen Widerstand

| $f$ [kHz] | $\Delta t$ [ $\mu$ s] | $s_{\Delta t}$ [ $\mu$ s] | Zeitabl. [ $\mu$ s/div] | $\varphi$ [rad] | $s_{\varphi}$ [rad] |
|-----------|-----------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------|---------------------|
| 110,0     | 0,55                  | 0,05                      | 0,5                     | 0,38            | 0,03                |
| 124,0     | 0,75                  | 0,05                      | 0,5                     | 0,58            | 0,04                |
| 134,0     | 0,95                  | 0,05                      | 0,5                     | 0,80            | 0,04                |
| 139,0     | 1,13                  | 0,05                      | 0,5                     | 0,98            | 0,04                |
| 143,0     | 1,25                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,12            | 0,04                |
| 147,0     | 1,40                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,29            | 0,05                |
| 149,0     | 1,48                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,38            | 0,05                |
| 151,0     | 1,55                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,47            | 0,05                |
| 151,5     | 1,60                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,52            | 0,05                |
| 152,0     | 1,60                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,53            | 0,05                |
| 152,5     | 1,63                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,56            | 0,05                |
| 153,0     | 1,65                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,59            | 0,05                |
| 153,5     | 1,68                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,62            | 0,05                |
| 154,0     | 1,68                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,62            | 0,05                |
| 155,0     | 1,70                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,66            | 0,05                |
| 157,0     | 1,78                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,75            | 0,05                |
| 159,0     | 1,85                  | 0,05                      | 0,5                     | 1,85            | 0,05                |
| 163,0     | 1,95                  | 0,05                      | 0,5                     | 2,00            | 0,05                |
| 167,0     | 2,05                  | 0,05                      | 0,5                     | 2,15            | 0,05                |
| 171,0     | 2,10                  | 0,05                      | 0,5                     | 2,26            | 0,05                |
| 181,0     | 2,18                  | 0,05                      | 0,5                     | 2,47            | 0,06                |
| 190,0     | 2,18                  | 0,05                      | 0,5                     | 2,60            | 0,06                |

Tabelle 2: Relevante Werte für die Phasenverschiebung mit ohmschem Widerstand

Der aufgetragene Verlauf der zeitlichen Verschiebung über die Frequenz kann für beide Messreihen in Abbildung 2 eingesehen werden.

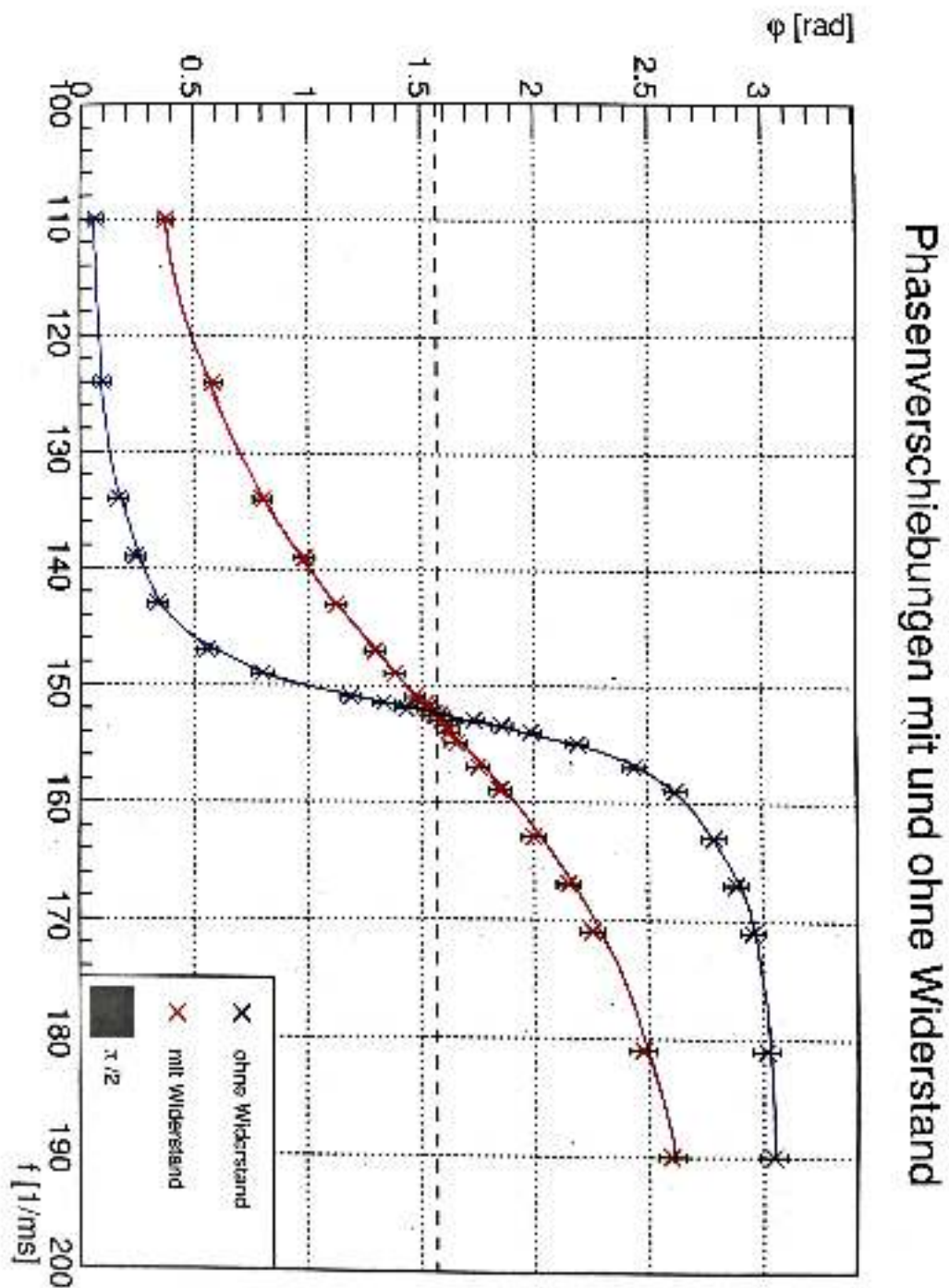


Abbildung 2: Phasenverschiebung aufgetragen über die Frequenz

Dabei werden grafisch die Frequenzen an der Stelle der Schnittpunkte der beiden Kurven mit  $\pi/2$  sowie deren Schnittpunkt miteinander ermittelt. Daraus wird der Wert für die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems bestimmt. Der Ablesefehler wird dabei grafisch mitbestimmt. Dies kann Abbildung 3 entnommen werden, die einen vergrößerten Ausschnitt der Phasenverschiebung aufgetragen über die Frequenz zeigt.

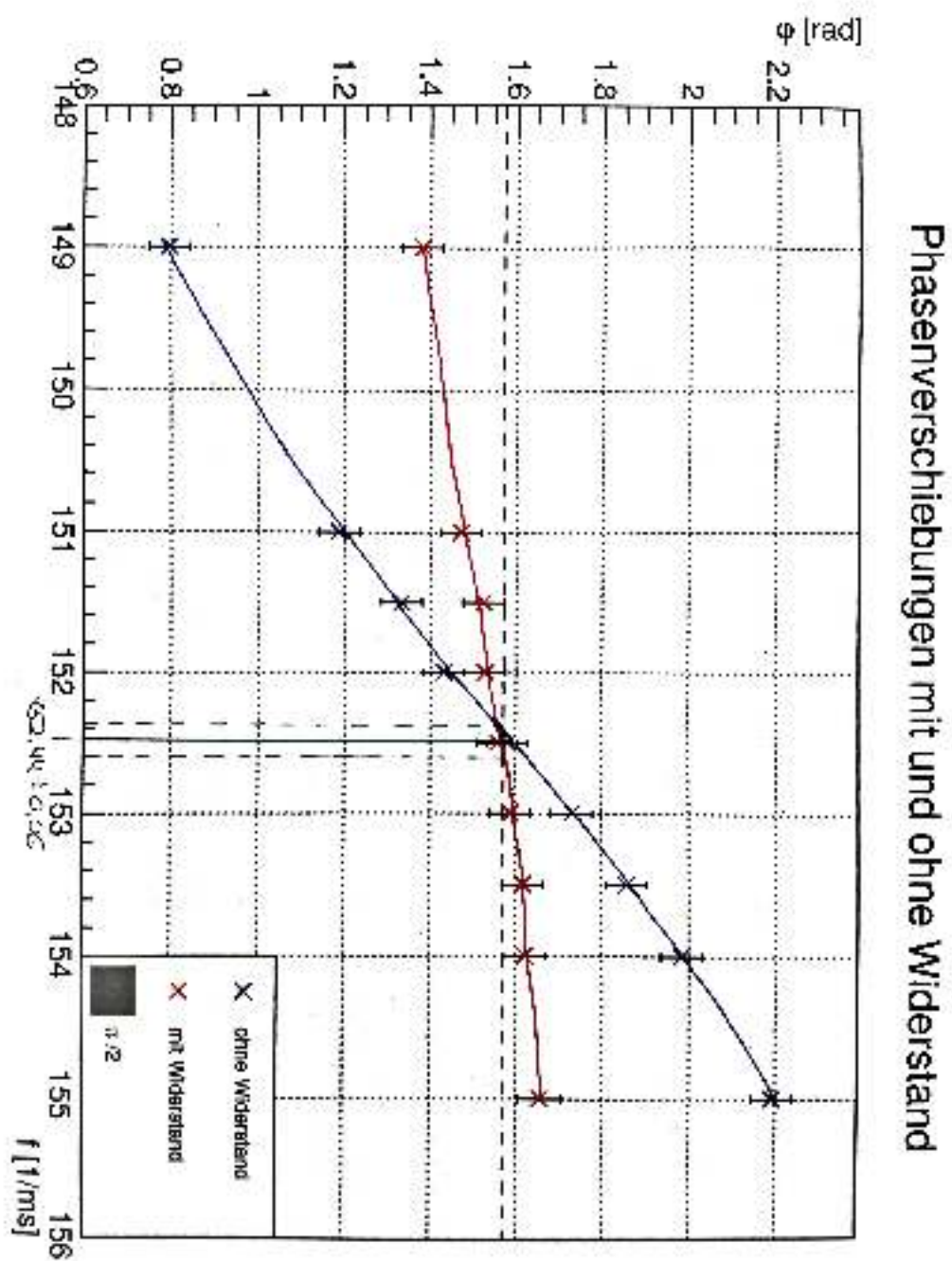


Abbildung 3: Vergrößerung des Verlaufs der Phasenverschiebung für veränderte Frequenzen mit grafischer Bestimmung der Eigenfrequenzen

Anschließend wird der Wert der Eigenfrequenz  $f_0$  grafisch an dem vergrößerten Ausschnitt bestimmt. Dies führt zu einem Wert von

$$f_0 = (152,44 \pm 0,06) \frac{1}{\text{ms}}. \quad (5.2)$$

Aus der Frequenz kann die Kreisfrequenz  $\omega_0$  über Gleichung 2.12 ermittelt werden, wobei der Fehler sich über

$$s_\omega = 2\pi s_f \quad (5.3)$$

ergibt.

Man erhält somit eine Eigenfrequenz von

$$\omega_0 = (957809 \pm 377) \frac{1}{\text{s}}. \quad (5.4)$$

Die Kapazität kann über Zusammenhang 2.3 berechnet werden, sodass gilt:

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 1,1450 \text{ nF} \quad (5.5)$$

Den Fehler kann man über

$$s_C = \frac{s_{\omega_0}}{\omega_0} \cdot C = 0,0005 \text{ nF} \quad (5.6)$$

ermitteln. Die berechnete Kapazität hat somit den Wert

$$C = (1,1450 \pm 0,0005) \text{ nF}. \quad (5.7)$$

Die Eichunsicherheit der Zeitablenkung wird in diesem Teil vernachlässigt, da sie nur in y-Richtung eine Rolle spielt und für die Bestimmung der Eigenfrequenz lediglich an der x-Achse abgelesen wird.

### b) Betrachtung des Verhältnisses von Strom und angelegter Spannung sowie Berechnung der Widerstände

Zunächst wurden die aufzutragenden Verhältnisse  $I_0/U_{a0}$  über Gleichung 2.9 berechnet. Die Unsicherheiten auf die Verhältnisse ergeben sich aus

$$s_{I_0/U_{a0}} = \frac{I_0}{U_{a0}} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_C}{C}\right)^2 + \left(\frac{s_{U_{C0}/U_{a0}}}{U_{C0}/U_{a0}}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Daraus folgen die in Tabelle 3 eingetragenen Werte, wobei die ersten drei Spalten zum Messdurchgang ohne zusätzlichen Widerstand  $R_1$  gehören und die hinteren drei mit zusätzlichem Widerstand durchgeführt wurden.

| $f$ [kHz] | $I_0/U_{a0}$ [A/V] ohne $R_1$ | $s_{I_0/U_{a0}}$ [A/V] | $f$ [kHz] | $I_0/U_{a0}$ [A/V] mit $R_1$ | $s_{I_0/U_{a0}}$ [A/V] |
|-----------|-------------------------------|------------------------|-----------|------------------------------|------------------------|
| 100       | 0,0020                        | 0,0003                 | 100       | 0,0018                       | 0,0001                 |
| 114       | 0,0023                        | 0,0003                 | 114       | 0,0023                       | 0,0001                 |
| 124       | 0,0029                        | 0,0004                 | 124       | 0,0027                       | 0,0002                 |
| 134       | 0,0045                        | 0,0007                 | 134       | 0,0034                       | 0,0003                 |
| 139       | 0,0063                        | 0,0004                 | 139       | 0,0035                       | 0,0003                 |
| 143       | 0,0080                        | 0,0006                 | 142       | 0,0038                       | 0,0003                 |
| 147       | 0,0128                        | 0,0012                 | 144       | 0,0039                       | 0,0003                 |
| 149       | 0,0157                        | 0,0015                 | 146       | 0,0041                       | 0,0003                 |
| 151       | 0,0216                        | 0,0026                 | 147       | 0,0041                       | 0,0003                 |
| 152       | 0,0233                        | 0,0030                 | 148       | 0,0041                       | 0,0003                 |
| 153       | 0,0233                        | 0,0030                 | 149       | 0,0041                       | 0,0003                 |
| 154       | 0,0216                        | 0,0026                 | 151       | 0,0040                       | 0,0003                 |
| 155       | 0,0185                        | 0,0020                 | 153       | 0,0040                       | 0,0003                 |
| 157       | 0,0138                        | 0,0013                 | 155       | 0,0039                       | 0,0003                 |
| 159       | 0,0123                        | 0,0011                 | 158       | 0,0038                       | 0,0003                 |
| 163       | 0,0073                        | 0,0006                 | 161       | 0,0036                       | 0,0003                 |
| 167       | 0,0055                        | 0,0004                 | 165       | 0,0035                       | 0,0003                 |
| 171       | 0,0042                        | 0,0003                 | 175       | 0,0025                       | 0,0002                 |
| 181       | 0,0027                        | 0,0002                 | 185       | 0,0019                       | 0,0001                 |
| 200       | 0,0016                        | 0,0001                 | 200       | 0,0014                       | 0,0001                 |

Tabelle 3: Verhältnisse  $I_0/U_{a0}$  mit Unsicherheiten ohne und mit ohmschem Widerstand  $R_1$

Anschließend werden diese Werte in ein Diagramm eingetragen, wobei die Frequenzen auf die x-Achse und  $\frac{I_0}{U_{a0}}$  auf die y-Achse aufgetragen werden, zu sehen in Abbildung 4. Aus den Maxima lassen sich dabei die Kehrwerte der ohmschen Widerstände grafisch ablesen, indem der y-Wert des Maximums abgelesen wird. Denn für die Bestimmung der ohmschen Widerstände wird angenommen, dass die Maxima der Kurven bei  $\omega_0$  liegen. Denn mit dieser Annahme können die Kehrwerte der Widerstände aufgrund von Gleichung 2.11 direkt abgelesen werden.

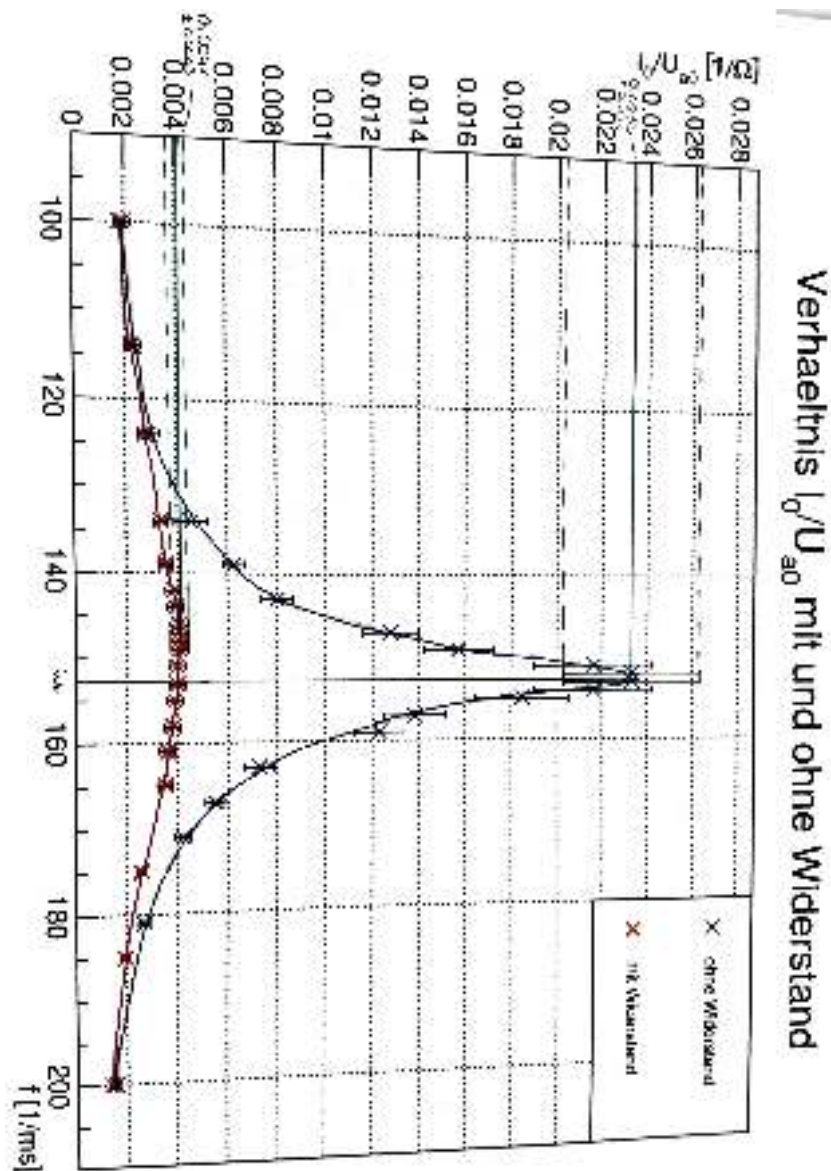


Abbildung 4: Phasenverschiebung aufgetragen über die Frequenz

Die Unsicherheiten der abgelesenen Werte setzen sich letztendlich aus dem Ablesefehler und dem Fehler durch die Eichunsicherheiten (die laut Anleitung in diesem Fall nicht vernachlässigt werden darf) zusammen. Dafür wurde die Eichunsicherheit der Spannung über

$$s_U = \frac{3\% \text{ vom Messwert} + 2 \text{ digits}}{\sqrt{3}} \quad (5.9)$$

berechnet. Um aus der Eichtoleranz des Geräts den Fehler zu erhalten, muss durch  $\sqrt{3}$  geteilt werden. Die systematische Unsicherheit auf das Verhältnis  $U_{C0}/U_{a0}$  ergibt sich dann aus

$$s_{U_{C0}/U_{a0}} = \frac{U_{C0}}{U_{a0}} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{U_{C0}}}{U_{C0}}\right)^2 + \left(\frac{s_{U_{a0}}}{U_{a0}}\right)^2} \quad (5.10)$$

Der Fehler auf den abgelesenen Wert ergibt sich im Endeffekt aus dem grafischen Fehler und

der systematischen Unsicherheit über

$$s_R = \sqrt{s_{\text{grafisch}}^2 + s_{\text{Eich}}^2}. \quad (5.11)$$

Für das annähernd ungedämpfte System erhält man somit

$$R_{\text{Rest}} = (43 \pm 6)\Omega. \quad (5.12)$$

Für das System mit Widerstand  $R_1$  erhält man dagegen

$$R_{R_{\text{rest}}+R_1} = (244 \pm 18)\Omega. \quad (5.13)$$

Dabei ergibt sich der Widerstand aus dem Kehrwert des am Diagramm abgelesenen Werts. Die Unsicherheit berechnet sich demnach über

$$s_R = R \cdot \frac{s_R}{1/R} = s_R \cdot R^2. \quad (5.14)$$

Der mit dem Digital-Multimeter gemessene Werte für den ohmschen Widerstand der Spule entspricht

$$R_L = R_{\text{Rest}} = (16,8 \pm 0,2)\Omega \quad (5.15)$$

und der des ohmschen Widerstand  $R_1$  hat den Wert

$$R_1 = (216 \pm 1)\Omega. \quad (5.16)$$

Da ohne zusätzlichen Widerstand  $R_1$  der ohmsche Widerstand  $R_L$  der Spule der einzige zu berücksichtigende Restwiderstand ist, wird dieser auch als  $R_{\text{Rest}}$  bezeichnet.

Die Unsicherheiten berechnen sich hierbei über

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{0,8\% \text{ vom Messwert} + 0,2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0,05^2} \quad (5.17)$$

Dabei beträgt der Ablesefehler  $0,5 \text{ digits} = 0,05 \Omega$ .

Der gesamte ohmsche Widerstand für das System mit Widerstand berechnet sich aus

$$R_{R_{\text{Rest}}+R_1} = R_L + R_1 \quad (5.18)$$

und ergibt sich damit zu

$$R_{R_{\text{Rest}}+R_1} = (233 \pm 1)\Omega. \quad (5.19)$$

Die Unsicherheit auf diesen Wert wird dabei über

$$s_{R_{R_{\text{Rest}}+R_1}} = \sqrt{s_{R_L}^2 + s_{R_1}^2} = 1\Omega \quad (5.20)$$

berechnet.

### c) Bestimmung der Resonanzfrequenzen

In diesem Versuchsteil wird das Verhältnis zwischen  $U_{C0}$  und  $U_{a0}$  aufgetragen, um die Resonanzfrequenzen zu bestimmen. Für die Unsicherheiten auf die einzelnen Spannungen wurden lediglich die Ablesefehler am Oszilloskop von 1/10 Division verwendet. Der daraus resultierende Fehler auf das Verhältnis berechnet sich über

$$s_{U_{C0}/U_{a0}} = \frac{U_{C0}}{U_{a0}} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{U_{C0}}}{U_{C0}}\right)^2 + \left(\frac{s_{U_{a0}}}{U_{a0}}\right)^2}. \quad (5.21)$$

Die Werte ohne zusätzlichen Widerstand sind in Tabelle 4 und alle mit Widerstand in Tabelle 5 zu finden.

| $f$ [kHz] | $U_{a0}$ [V] | $s_{U_{a0}}$ [V] | $U_{C0}$ [V] | $s_{U_{C0}}$ [V] | $U_{C0}/U_{a0}$ | $s_{U_{C0}/U_{a0}}$ | $E_1$ [V/div] | $E_2$ [V/div] |
|-----------|--------------|------------------|--------------|------------------|-----------------|---------------------|---------------|---------------|
| 100       | 0,35         | 0,02             | 0,58         | 0,02             | 1,66            | 0,11                | 0,2           | 0,2           |
| 114       | 0,34         | 0,02             | 0,70         | 0,02             | 2,06            | 0,13                | 0,2           | 0,2           |
| 124       | 0,33         | 0,02             | 0,83         | 0,05             | 2,50            | 0,21                | 0,2           | 0,5           |
| 134       | 0,31         | 0,02             | 0,95         | 0,05             | 3,06            | 0,26                | 0,2           | 0,5           |
| 139       | 0,31         | 0,02             | 1,00         | 0,05             | 3,23            | 0,26                | 0,2           | 0,5           |
| 142       | 0,30         | 0,02             | 1,05         | 0,05             | 3,50            | 0,29                | 0,2           | 0,5           |
| 144       | 0,30         | 0,02             | 1,08         | 0,05             | 3,58            | 0,29                | 0,2           | 0,5           |
| 146       | 0,29         | 0,02             | 1,08         | 0,05             | 3,71            | 0,31                | 0,2           | 0,5           |
| 147       | 0,29         | 0,02             | 1,08         | 0,05             | 3,71            | 0,31                | 0,2           | 0,5           |
| 148       | 0,29         | 0,02             | 1,08         | 0,05             | 3,71            | 0,31                | 0,2           | 0,5           |
| 149       | 0,29         | 0,02             | 1,08         | 0,05             | 3,71            | 0,31                | 0,2           | 0,5           |
| 151       | 0,29         | 0,02             | 1,05         | 0,05             | 3,62            | 0,30                | 0,2           | 0,5           |
| 153       | 0,29         | 0,02             | 1,05         | 0,05             | 3,62            | 0,30                | 0,2           | 0,5           |
| 155       | 0,29         | 0,02             | 1,03         | 0,05             | 3,53            | 0,30                | 0,2           | 0,5           |
| 158       | 0,29         | 0,02             | 1,00         | 0,05             | 3,45            | 0,29                | 0,2           | 0,5           |
| 161       | 0,29         | 0,02             | 0,95         | 0,05             | 3,28            | 0,28                | 0,2           | 0,5           |
| 165       | 0,29         | 0,02             | 0,93         | 0,05             | 3,19            | 0,28                | 0,2           | 0,5           |
| 175       | 0,31         | 0,02             | 0,72         | 0,02             | 2,32            | 0,16                | 0,2           | 0,2           |
| 185       | 0,33         | 0,02             | 0,58         | 0,02             | 1,76            | 0,12                | 0,2           | 0,2           |
| 200       | 0,34         | 0,02             | 0,43         | 0,02             | 1,26            | 0,09                | 0,2           | 0,2           |

Tabelle 4: Werte zum Verhältnis  $U_{C0}/U_{a0}$  mit ohmschem Widerstand

| $f$ [kHz] | $U_{a0}$ [V] | $s_{U_{a0}}$ [V] | $U_{C0}$ [V] | $s_{U_{C0}}$ [V] | $U_{C0}/U_{a0}$ | $s_{U_{C0}/U_{a0}}$ | $E_1$ [V/div] | $E_2$ [V/div] |
|-----------|--------------|------------------|--------------|------------------|-----------------|---------------------|---------------|---------------|
| 100       | 0,35         | 0,05             | 0,63         | 0,05             | 1,79            | 0,29                | 0,5           | 0,5           |
| 114       | 0,38         | 0,05             | 0,80         | 0,05             | 2,13            | 0,31                | 0,5           | 0,5           |
| 124       | 0,38         | 0,05             | 1,00         | 0,05             | 2,67            | 0,38                | 0,5           | 0,5           |
| 134       | 0,35         | 0,05             | 1,45         | 0,05             | 4,14            | 0,61                | 0,5           | 0,5           |
| 139       | 0,32         | 0,02             | 1,83         | 0,05             | 5,70            | 0,39                | 0,2           | 0,5           |
| 143       | 0,30         | 0,02             | 2,20         | 0,10             | 7,33            | 0,59                | 0,2           | 1,0           |
| 147       | 0,24         | 0,02             | 2,80         | 0,10             | 11,67           | 1,06                | 0,2           | 1,0           |
| 149       | 0,22         | 0,02             | 3,15         | 0,10             | 14,32           | 1,38                | 0,2           | 1,0           |
| 151       | 0,17         | 0,02             | 3,35         | 0,10             | 19,71           | 2,39                | 0,2           | 1,0           |
| 152       | 0,16         | 0,02             | 3,40         | 0,10             | 21,25           | 2,73                | 0,2           | 1,0           |
| 153       | 0,16         | 0,02             | 3,40         | 0,10             | 21,25           | 2,73                | 0,2           | 1,0           |
| 154       | 0,17         | 0,02             | 3,35         | 0,10             | 19,71           | 2,39                | 0,2           | 1,0           |
| 155       | 0,19         | 0,02             | 3,20         | 0,10             | 16,84           | 1,85                | 0,2           | 1,0           |
| 157       | 0,23         | 0,02             | 2,90         | 0,10             | 12,61           | 1,18                | 0,2           | 1,0           |
| 159       | 0,25         | 0,02             | 2,80         | 0,10             | 11,20           | 0,98                | 0,2           | 1,0           |
| 163       | 0,30         | 0,02             | 2,00         | 0,10             | 6,67            | 0,56                | 0,2           | 1,0           |
| 167       | 0,32         | 0,02             | 1,60         | 0,05             | 5,00            | 0,35                | 0,2           | 0,5           |
| 171       | 0,34         | 0,02             | 1,30         | 0,05             | 3,82            | 0,27                | 0,2           | 0,5           |
| 181       | 0,35         | 0,02             | 0,85         | 0,05             | 2,43            | 0,20                | 0,2           | 0,5           |
| 200       | 0,35         | 0,02             | 0,50         | 0,02             | 1,43            | 0,10                | 0,2           | 0,2           |

Tabelle 5: Werte zum Verhältnis  $U_{C0}/U_{a0}$  ohne ohmschen Widerstand

Im Anschluss wird, wie in Abbildung 5 erkennbar, die Frequenz auf die x-Achse und das Verhältnis der Spannungen auf die y-Achse aufgetragen.

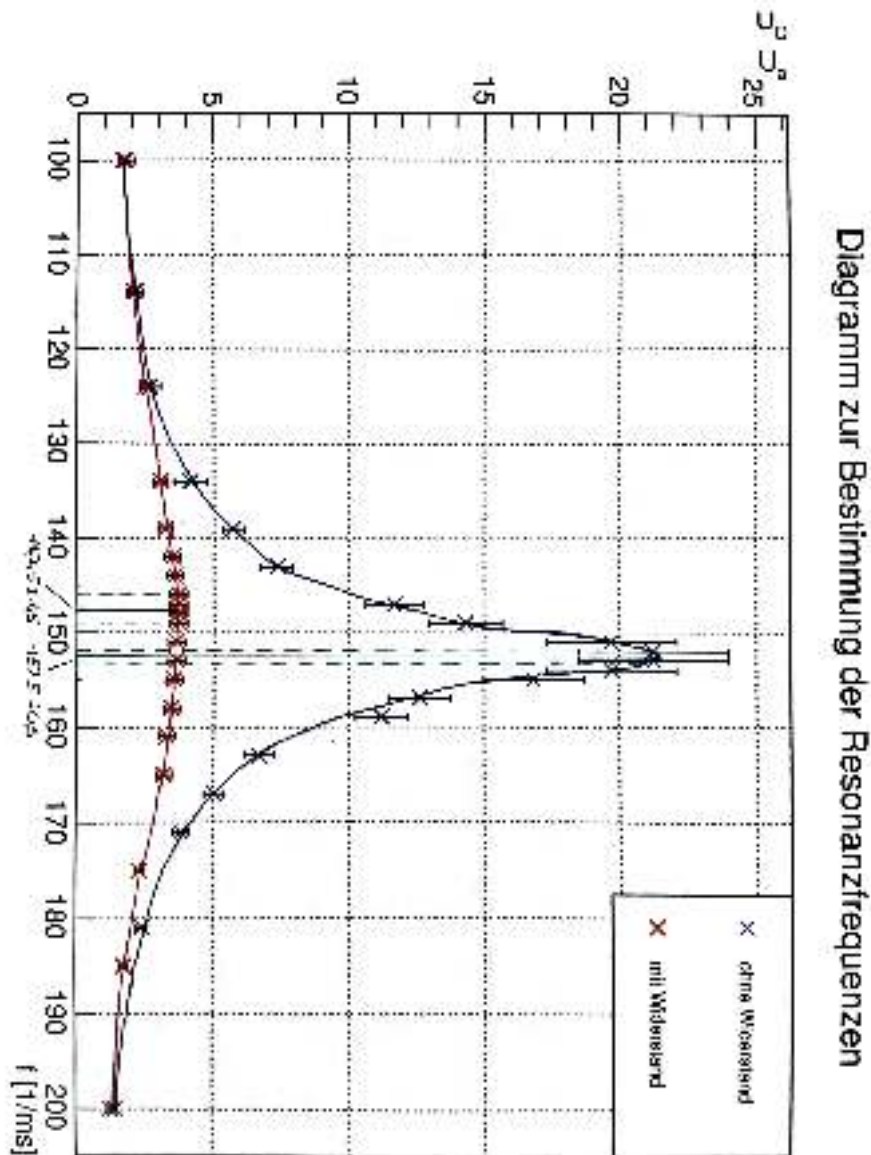


Abbildung 5: Grafische Bestimmung der Resonanzfrequenz durch das Verhältnis der Spannungen aufgetragen über die Frequenz

Daraus ergibt sich für die Resonanzfrequenz ohne zusätzlichen Widerstand  $R_1$

$$f_{R0} = (152000 \pm 500) \frac{1}{s} \quad (5.22)$$

und für die Resonanzfrequenz mit Widerstand

$$f_{R1} = (147500 \pm 1500) \frac{1}{s}. \quad (5.23)$$

Dabei wird als Unsicherheit lediglich der Ablesfehler angegeben, da der Fehler durch die Eichung des Oszilloskops hier irrelevant ist. Das liegt daran, dass hier das Verhältnis der Spannungen betrachtet wird. Da sich ein systematischer Fehler durch das Oszilloskop jedoch auf beide Spannungen gleichermaßen auswirkt, muss er somit nicht berücksichtigt werden.

### d) Berechnung der Resonanzfrequenzen und Betrachtung der relativen Verschiebungen

Aus den mit dem Digitalmultimeter direkt gemessenen Widerständen sollen im Folgenden die Resonanzfrequenzen theoretisch berechnet werden. Die Widerstände wurden dabei mit Unsicherheiten in Teil (b) angegeben (siehe 5.15 und 5.19).

Die Resonanzfrequenz wird über

$$\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{L/C}} \quad (5.24)$$

berechnet. Dabei ist die Induktivität der Spule mit  $L = 952 \mu\text{H}$  gegeben. Sie wird dabei als genau angenommen. Die Unsicherheit auf die Resonanzfrequenz wird über Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$s_{\omega_R} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_R}{\partial \omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_R}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_R}{\partial C}\right)^2} \quad (5.25)$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{1 - \frac{CR^2}{2L}} \cdot s_{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{-CR\omega_0}{2L\sqrt{1 - \frac{CR^2}{2L}}} \cdot s_R\right)^2 + \left(\frac{-R^2\omega_0}{2L\sqrt{1 - \frac{CR^2}{2L}}} \cdot s_C\right)^2} \quad (5.26)$$

Danach ergibt sich für die Resonanzfrequenz ohne Widerstand

$$\omega_R = (957700 \pm 400) \frac{1}{\text{s}} \quad (5.27)$$

und mit Widerstand

$$\omega_R = (942100 \pm 400) \frac{1}{\text{s}}. \quad (5.28)$$

Die Verschiebungen ergeben sich dann für das System ohne zusätzlichen Widerstand über

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_R. \quad (5.29)$$

Für den Fall mit Widerstand erfolgt die Rechnung analog. Für die Unsicherheiten der beiden Verschiebungen wird Fehlerfortpflanzung angewendet:

$$s_{\Delta\omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta\omega}{\partial \omega_0} \cdot s_{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\omega}{\partial R} \cdot s_R\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_R}\right)^2 \cdot s_{\omega_0}^2 + \left(\frac{R}{2L^2\omega_R}\right)^2 \cdot s_R^2} \quad (5.30)$$

Die Verschiebung der beiden Resonanzfrequenzen von der Eigenfrequenz ist beim System ohne zusätzlichen Widerstand demnach

$$\Delta\omega = (80 \pm 2) \frac{1}{\text{s}} \quad (5.31)$$

und für das System mit Widerstand  $R_1$

$$\Delta\omega = (15700 \pm 200) \frac{1}{\text{s}}. \quad (5.32)$$

## 6 Zusammenfassung und Diskussion

Die ermittelte Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreis  $f_0$  beträgt

$$f_0 = (152440 \pm 60) \frac{1}{s} \quad (6.1)$$

Die darüber ermittelte Kapazität des Systems ist

$$C = (1,1450 \pm 0,0005) \text{nF} . \quad (6.2)$$

Die Eichunsicherheit konnte bei diesen Berechnungen vernachlässigt werden, da lediglich auf der x-Achse abgelesen wurde und die Eichunsicherheit der Zeitablenkung nur in y-Richtung eine Rolle spielt. Allerdings wird die Genauigkeit des Wertes dadurch beeinträchtigt, dass grafische Auswertungen immer mit starken Unsicherheiten behaftet sind.

Die Lage des Maximums ohne Widerstand in Abbildung 4 liegt nur minimal links von dem Punkt der Eigenfrequenz  $f_0$ . Das Maximum der Kurve mit Widerstand ist allerdings etwas weiter nach links verschoben im Vergleich zu der in Teil (a) bestimmten Eigenfrequenz  $f_0$ . Dies erscheint jedoch im Rahmen der Unsicherheiten der Messungen und im Hinblick auf das erwartete Ergebnis hin sinnvoll.

Der aus dem Diagramm 4 bestimmte Widerstand des annähernd ungedämpften Systems beträgt

$$R_{Rest} = (43 \pm 6) \Omega . \quad (6.3)$$

Der mit dem Digital-Multimeter gemessene Wert ist

$$16,8 \pm 0,2) \Omega . \quad (6.4)$$

Diese beiden Werte liegen innerhalb einer  $5\sigma$ - Umgebung. Die starke Abweichung könnte durch die endliche Anzahl der Messpunkte erklärt werden, da die Lage des Maximums dadurch immer mit einer starken Unsicherheit behaftet bleibt.

Für den aus dem Diagramm 4 bestimmten Widerstand für das System mit zusätzlichem Widerstand erhält man

$$R_{Rest} = (244 \pm 18) \Omega . \quad (6.5)$$

Über das Digital-Multimeter wurde folgender Wert bestimmt:

$$R_{Rest+R_1} = (216 \pm 1) \Omega . \quad (6.6)$$

Diese beiden Werte stimmen innerhalb einer  $2\sigma$ -Umgebung miteinander überein.

Die grafisch bestimmte Resonanzfrequenz des annähernd ungedämpften Systems beträgt

$$f_R = (152500 \pm 500) \frac{1}{s} . \quad (6.7)$$

Der theoretisch berechnete Wert ergibt sich dagegen zu

$$f_R = (152430 \pm 60) \frac{1}{s} . \quad (6.8)$$

Damit stimmen die beiden Werte innerhalb des einfachen Fehlerbereichs miteinander überein. Für das System mit zusätzlich eingefügtem Widerstand beträgt die grafisch bestimmte Resonanzfrequenz dagegen

$$f_R = (147500 \pm 1500) \frac{1}{\text{s}}. \quad (6.9)$$

Die berechnete Resonanzfrequenz ist in diesem Fall

$$f_R = (150290 \pm 60) \frac{1}{\text{s}}, \quad (6.10)$$

sodass die beiden Werte einander innerhalb einer  $2\sigma$ -Umgebung entsprechen.

Die Werte stimmen gut miteinander überein, da die Unsicherheiten groß genug abgeschätzt wurden. Die grafische Bestimmung ist vor allem bei dem System mit zusätzlichem Widerstand sehr ungenau, weshalb darauf auch ein dreimal größerer Fehler abgeschätzt wurde als für das annähernd ungedämpfte System. Die Eichunsicherheiten wurden dabei vernachlässigt, da sie sich bei dem Quotienten aus den Spannungen aufheben.

Die Verschiebung der Resonanzkreisfrequenzen ist für das System ohne zusätzlichen Widerstand

$$\Delta\omega = (80 \pm 2) \frac{1}{\text{s}} \quad (6.11)$$

und mit zusätzlichem Widerstand

$$\Delta\omega = (15700 \pm 200) \frac{1}{\text{s}}. \quad (6.12)$$

Das System ohne zusätzlichen Widerstand ist leicht nach links verschoben im Vergleich zu der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Spule einen gewissen ohmschen Widerstand besitzt, der zu einer Dämpfung und damit zu einer leichten Verschiebung des Maximums führt. Die Verschiebung des Systems mit zusätzlichem Widerstand ist deutlich größer, was allerdings aufgrund des bedeutend größeren ohmschen Widerstands so zu erwarten war.

Diese Verschiebung stellt auch einen weiteren Grund dar, weshalb die Werte der grafisch bestimmten ohmschen Widerstände nicht ideal ausgefallen sind, da die Annahme  $\omega = \omega_0$  offensichtlich nicht genau gegeben war.

## 7 Literatur

- [1] *Physiklabor für Anfänger\*innen Teil 2, Teil A, Versuchs 53, S.93-97.*

## 8 Anhang

Vorbereitung

Bestimmung der statischen Lasten (in kN/m²)

inkl. VNF + 0 = 8,5 kN/m²

$R_L = 14,8 \text{ m}^2$  (Stirn)

$R_{Lz} = 2 \cdot 5 \cdot 0,2$  (Längsrichtung)

$\left. \begin{array}{l} R_L \\ R_{Lz} \end{array} \right\} \text{ (als Summe in die Richtung)}$

0,5 m 2008

Bestimmung der statischen Lasten (in kN/m²)

Bestimmung der statischen Lasten (in kN/m²)

| h / m | 2 Längsrichtung | 2 Längsrichtung | Statische Lasten | Statische Lasten |
|-------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 100,0 | 2,5             | 2,5             | 0,5              | 0,5              |
| 114,0 | 2,5             | 3,5             | 0,5              | 0,5              |
| 124,0 | 2,5             | 4               | 0,5              | 0,5              |
| 134,0 | 2,4             | 5,8             | 0,5              | 0,5              |
| 144,0 | 3,2             | 7,3             | 0,2              | 0,5              |
| 153,0 | 3,0             | 4,4             | 0,2              | 1,4              |
| 167,0 | 2,9             | 5,6             | 0,2              | 1,4              |
| 179,0 | 2,2             | 6,3             | 0,2              | 1                |
| 184,0 | 1,7             | 6,7             | 0,2              | 1                |
| 182,0 | 1,6             | 6,8             | 0,2              | 1                |
| 183,0 | 1,6             | 6,8             | 0,2              | 1                |
| 184,0 | 1,7             | 6,7             | 0,2              | 1                |
| 185,0 | 1,9             | 6,4             | 0,2              | 1                |
| 187,0 | 2,3             | 5,8             | 0,2              | 1                |
| 189,0 | 2,5             | 5,6             | 0,2              | 1                |
| 193,0 | 2,5             | 4               | 0,2              | 1,4              |
| 197,0 | 3,2             | 6,4             | 0,2              | 0,5              |
| 199,0 | 3,4             | 5,2             | 0,2              | 0,5              |
| 181,0 | 3,5             | 3,4             | 0,2              | 0,5              |
| 200,0 | 3,5             | 5               | 0,2              | 0,2              |

| ohne Widerstandsthor |              | mit Widerstandsthor |         |              |                    |
|----------------------|--------------|---------------------|---------|--------------|--------------------|
| f / kHz              | dt / $\mu$ s | Zeitd. $\mu$ s/div  | f / kHz | dt / $\mu$ s | Zeitd. $\mu$ s/div |
| 110,0                | 0,2          | 0,5                 | 110,0   | 0,2          | 0,5                |
| 124,0                | 0,25         | 0,5                 | 124,0   | 0,25         | 0,5                |
| 134,0                | 0,4          | 0,5                 | 134,0   | 0,4          | 0,5                |
| 139,0                | 0,55         | 0,5                 | 139,0   | 0,55         | 0,5                |
| 143,0                | 0,75         | 0,5                 | 143,0   | 0,75         | 0,5                |
| 147,0                | 1,2          | 0,5                 | 147,0   | 1,2          | 0,5                |
| 149,0                | 1,7          | 0,5                 | 149,0   | 1,7          | 0,5                |
| 151,0                | 2,5          | 0,5                 | 151,0   | 2,5          | 0,5                |
| 151,5                | 2,8          | 0,5                 | 151,5   | 2,8          | 0,5                |
| 152,0                | 3            | 0,5                 | 152,0   | 3            | 0,5                |
| 152,5                | 3,3          | 0,5                 | 152,5   | 3,3          | 0,5                |
| 153,0                | 3,6          | 0,5                 | 153,0   | 3,6          | 0,5                |
| 153,5                | 3,85         | 0,5                 | 153,5   | 3,85         | 0,5                |
| 154,0                | 4,1          | 0,5                 | 154,0   | 4,1          | 0,5                |
| 154,5                | 4,5          | 0,5                 | 154,5   | 4,5          | 0,5                |
| 157,0                | 4,95         | 0,5                 | 157,0   | 4,95         | 0,5                |
| 159,0                | 5,25         | 0,5                 | 159,0   | 5,25         | 0,5                |
| 163,0                | 5,45         | 0,5                 | 163,0   | 5,45         | 0,5                |
| 167,0                | 5,5          | 0,5                 | 167,0   | 5,5          | 0,5                |
| 171,0                | 5,5          | 0,5                 | 171,0   | 5,5          | 0,5                |
| 181,0                | 5,3          | 0,5                 | 181,0   | 5,3          | 0,5                |
| 190,0                | 5,1          | 0,5                 | 190,0   | 5,1          | 0,5                |

Fehler: Oszilloskop: 3%      Ableserfehler Oszilloskop:  $\frac{1}{10}$  div  
 Funktionsgen: C50495  
 Ablesegen: 0,0005 kHz

| mit Widerstand Amplituden |           |           |                       | Beitrag $1 \frac{dB}{Hz}$ |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------------------|---------------------------|
| f/Hz                      | 200 Hz/Hz | 200 Hz/Hz | Empf. $\frac{dB}{Hz}$ | Empf. $\frac{dB}{Hz}$     |
| 100,0                     | 3,5       | 5,8       | 0,2                   | 0,2                       |
| 110,0                     | 3,4       | 7         | 0,2                   | 0,2                       |
| 120,0                     | 3,3       | 3,3       | 0,2                   | 0,5                       |
| 130,0                     | 3,1       | 3,8       | 0,2                   | 0,5                       |
| 139,0                     | 3,1       | 2,4       | 0,2                   | 0,5                       |
| 142,0                     | 3         | 4,2       | 0,2                   | 0,5                       |
| 144,0                     | 3         | 4,3       | 0,2                   | 0,5                       |
| 146,0                     | 2,9       | 4,3       | 0,2                   | 0,5                       |
| 147,0                     | 2,9       | 4,3       | 0,2                   | 0,5                       |
| 148,0                     | 2,9       | 4,3       | 0,2                   | 0,5                       |
| 149,0                     | 2,9       | 4,3       | 0,2                   | 0,5                       |
| 151,0                     | 2,9       | 4,2       | 0,2                   | 0,5                       |
| 153,0                     | 2,9       | 4,2       | 0,2                   | 0,5                       |
| 155,0                     | 2,9       | 4,1       | 0,2                   | 0,5                       |
| 158,0                     | 2,9       | 4         | 0,2                   | 0,5                       |
| 161,0                     | 2,9       | 3,8       | 0,2                   | 0,5                       |
| 165,0                     | 2,9       | 3,7       | 0,2                   | 0,5                       |
| 175,0                     | 3,1       | 7,2       | 0,2                   | 0,2                       |
| 185,0                     | 3,3       | 5,8       | 0,2                   | 0,2                       |
| 200,0                     | 3,4       | 4,3       | 0,2                   | 0,2                       |

UT M. Zühl