

Versuch 83

Braggsche Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Einkristall

Protokoll des Anfänger-Praktikums II



Gruppe 14

Durchgeführt am
16.03.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	3
2	Grundlagen	3
3	Versuchsaufbau	5
4	Versuchsdurchführung	5
5	Auswertung	6
5.1	Zählrohrcharakteristik	6
5.2	Betrachtung des Spektrums	6
5.3	Bestimmung der Gitterkonstante	7
5.4	Moseleysches Gesetz	10
5.5	Bremsstrahlungseinsatz	10
6	Zusammenfassung und Diskussion	13
6.1	Zählrohrcharakteristik	13
6.2	Röntgenspektrum	13
7	Literatur	15
8	Anhang	16

1 Versuchsziel

Ziel des Versuchs ist die Untersuchung des Röntgenspektrums. Dazu soll zunächst die Charakteristik des Geiger-Müller-Zählers aufgenommen werden. Außerdem wird das Bremsstrahlenspektrum und die K_α - und die K_β -Röntgenstrahlung der verwendeten Kupferanode mit einem LiF-Einkristall gemessen. Des Weiteren wird die Gitterkonstante des Kristalls und die Wellenlänge der K_β -Linie bestimmt. Über das Mosleysche Gesetz soll außerdem die Wellenlänge der K_α -Linie berechnet und mit dem gegebenen Wert verglichen werden. Zuletzt wird aus der minimalen Wellenlänge des Röntgenstrahlspektrums das Plancksche Wirkungsquantum h ermittelt.

2 Grundlagen

Röntgenstrahlung entsteht immer dann, wenn Elektronen mit hoher kinetischer Energie auf Materie treffen und dabei einen Teil ihrer kinetischen Energie in elektromagnetische Strahlung umwandeln. Um diese Strahlung zu erhalten, wird eine Röntgenröhre verwendet, in der Elektronen an der Kathode emittiert und aufgrund der Spannung U_A zwischen Anode und Kathode stark beschleunigt werden. Sie treffen auf eine Gegenkathode aus Kupfer oder einem anderen Metall mit hoher Kernladungszahl. Dabei wird in diesem Versuch mit einer Spannung von 22kV gearbeitet.

Das durch den beschriebenen Aufbau erhaltene Spektrum der Röntgenstrahlung besteht aus der Bremsstrahlung und einem Linienspektrum, wobei die Bremsstrahlung kontinuierlich ist. Das Linienspektrum hängt immer von dem Material der Gegenkathode ab. Die Bremsstrahlung kommt dadurch zustande, dass Elektronen in der Gegenkathode abgelenkt, also beschleunigt werden und elektromagnetische Strahlung emittieren. Nimmt man an, dass die gesamte Energie der Elektronen in die Strahlung übergeht ergibt sich für die minimale Wellenlänge λ_{min} bzw. die maximale Frequenz ν_{max}

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_{min}} = eU_A. \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet e die Elementarladung, h das Plancksche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit.

Über das Gesetz von Moseley kann die Frequenz der K_α -Röntgenstrahlung in guter Näherung berechnet werden. Diese Strahlung entsteht, wenn ein auf die Gegenkathode oder Anode treffendes Elektron ein Elektron aus der inneren Schale (K-Schale) löst und deshalb ein Elektron aus einer äußeren Schicht dieses entstehende Loch füllt. Dabei wird die frei werdende Energiedifferenz als monoenergetische Strahlung emittiert. Von K_α -Röntgenstrahlung spricht man wenn ein Elektron von der L-Schale in die K-Schale übergeht und von K_β -Strahlung wenn ein Elektron von der M-Schale in die K-Schale übergeht. Für die K_α -Röntgenstrahlung gilt dann näherungsweise

$$\nu(K_\alpha) = \frac{c}{\lambda(K_\alpha)} = \frac{3}{4}(Z-1)^2 R_y, \quad (2.2)$$

wobei Z die Kernladungszahl des Gegenkathodenmaterials (hier Kupfer) und R_y die Rydbergenergie beschreibt. Die K_β -Strahlung besitzt eine größere Frequenz als die K_α -Röntgenstrahlung, da die Energiedifferenz zwischen den Schalen größer ist.

Bei der Bragg-Reflexion werden die Röntgenstrahlen an einem Einkristall gestreut. In bestimmten Richtungen kann es durch konstruktive Überlagerung verstärkt werden. Die Atome sind in den parallelen Ebenen des Kristalls regelmäßig angeordnet. Einen Schnitt durch einen solchen Kristall kann man in Abbildung 1 sehen.

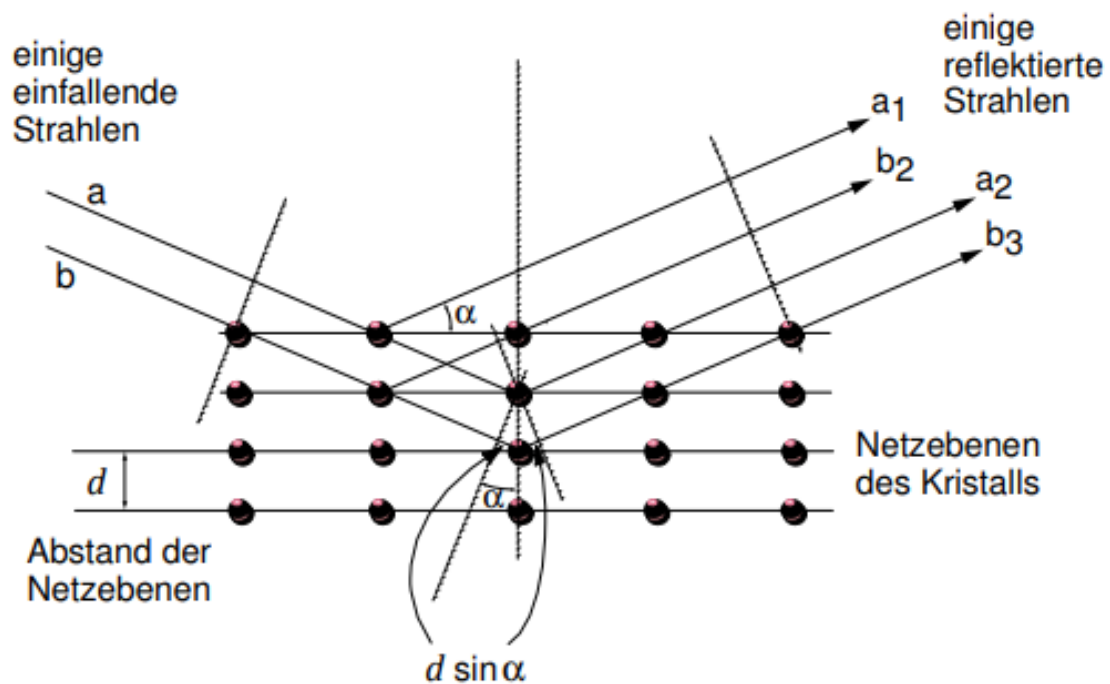


Abbildung 1: Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlen an einem Einkristall. d ist der Abstand der Netzebenen (Gitterkonstante) und α der Winkel zwischen Kristallebene und einfallendem Strahl.

Um konstruktive Interferenz zu erhalten, muss der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge entsprechen. Da der Gangunterschied hier genau dem Weg entspricht, den der untere Strahl länger läuft als der obere, ergibt sich für die Braggsche Reflexionsbedingung

$$2d \sin(\alpha) = n\lambda. \quad (2.3)$$

Dabei ist d der Abstand der Netzebenen zueinander (Gitterkonstante), n die betrachtete Beugungsordnung und α der Winkel zwischen Kristallebene und dem einfallenden Röntgenstrahl.

3 Versuchsaufbau

Der Aufbau besteht aus einem großen Behälter, in dem links die Röntgenröhre mit Kupferkathode untergebracht ist. Im rechten Teil des Aufbaus befindet sich der Einkristall und eine Winkelmesseinrichtung. Außen an dem Behälter kann die Spannung (hier 22kV) eingestellt werden. Der Winkel kann in $0,2^\circ$ -Schritten verstellt werden. Dabei gibt es einen Zeiger, der den Einfallswinkel α anzeigt, und einen anderen, den Detektor, der um den doppelten Winkel ausgelenkt ist. Der Winkel wird dabei an dem ersten Zeiger abgelesen. Die Röntgenstrahlung fällt durch eine kleine Öffnung von der Röntgenröhre in den rechten Teil des Aufbaus. Separat gibt es ein Hochspannungsgerät, das den Detektor versorgt, und ein Zählgerät, mit dem zu jedem Winkel der Strahlung die Zählrate bestimmt wird.

4 Versuchsdurchführung

Zunächst wurde an dem Versuchsaufbau eine Spannung von 20,8kV eingestellt. Danach wurde zur Messung der Zählrohrcharakteristik ein Winkel von $\alpha=12^\circ$ gewählt und bei Spannungen von 300V-750V mit einer Schrittweite von 25V (im steigenden Bereich mit kleineren Schritten) die Anzahl der Pulse N in jeweils $\Delta t = 30\text{s}$ gemessen.

Danach wurde für die weiteren Messungen die Spannung auf 530V gestellt. Die Spannung am Aufbau wurde auf 22V erhöht und während der restlichen Durchführung nicht mehr verändert. Damit wurden die Zählraten bei Winkeln von 5° bis 30° in $0,4^\circ$ - $0,6^\circ$ Schritten gemessen. Als Zeitintervall Δt wurden 10s gewählt, da in dieser Zeit bei 12° deutlich über 2000 Impulse gezählt wurden. Nach dieser Messung sollte im Bereich des Minimums am Anfang und den beiden Peaks der K_α - und K_β -Linien nochmal genauer gemessen werden, indem in diesem Bereich in $0,2^\circ$ -Schritten gemessen wurde, um den Ausschlag möglichst genau zu erfassen.

5 Auswertung

Alle Messergebnisse sind im Anhang zu finden.

5.1 Zählrohrcharakteristik

Zunächst werden zur Untersuchung der Charakteristik des Zählrohrs die gemessenen Counts N über die angelegte Spannung U aufgetragen. Dies ist in Abbildung 2 zu sehen. Aus dieser Grafik wird ersichtlich, wann der Plateaubereich erreicht wird, für den man eine konstante Zählrate erhält. Da der Zeitintervall der Messung konstant bei $\Delta t = 30\text{s}$ gehalten wurde, ist die Zählrate $\dot{N}$ proportional zu den Counts, sodass es keine Rolle spielt, ob N oder $\dot{N}$ aufgetragen wird. Bei den eingezeichneten Fehlern handelt es sich um den Ablesefehler der Spannung, der $s_U = 1\text{V}$ beträgt, und den Fehler auf N , der sich durch die zugrundeliegende Poissonverteilung über $s_N = \sqrt{N}$ ergibt.

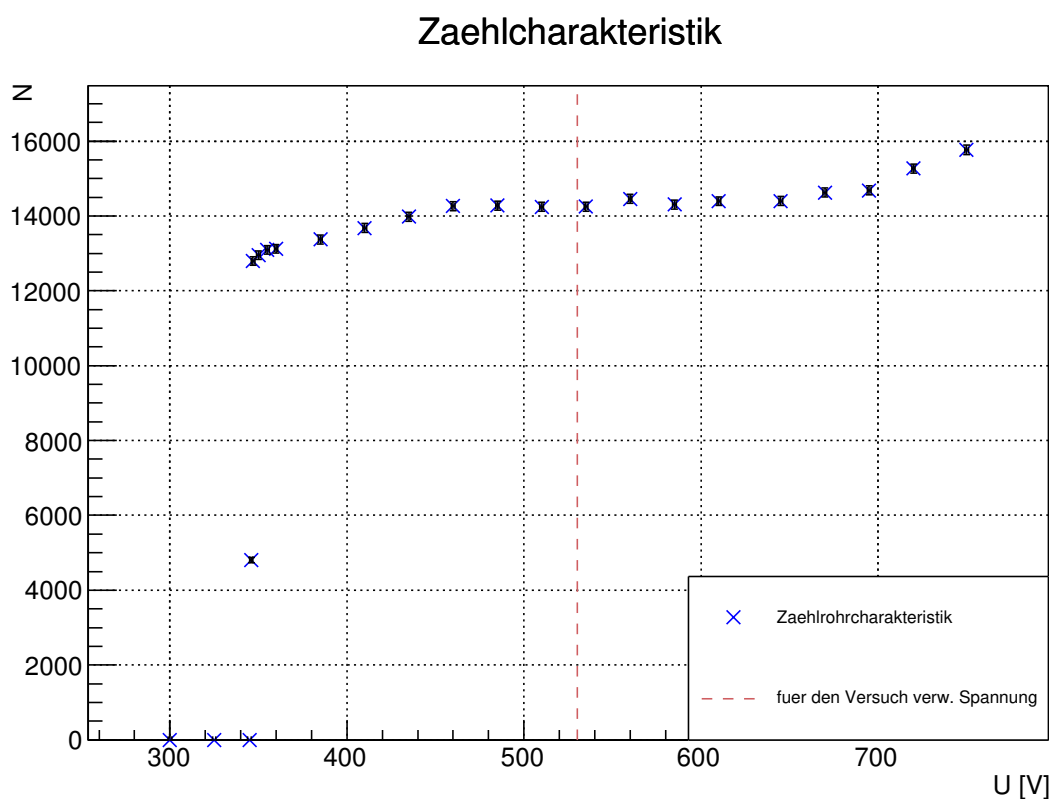


Abbildung 2: Zählrohrcharakteristik dargestellt durch die eingestellte Spannung und die dazu gemessenen Counts. Die für den weiteren Versuch eingestellte Spannung von $U = 530\text{V}$ ist hier in rot eingezeichnet.

5.2 Betrachtung des Spektrums

Zuerst werden die gemessenen Werte in einem Diagramm aufgetragen. Dabei werden die gemessenen Counts N logarithmisch über den eingestellten Winkel α eingezeichnet. Dies ist in Abbildung 3 zu sehen.

Als Fehlerbalken ist dabei der Ablesefehler des Winkels α dargestellt, der auf $s_\alpha = 0,1^\circ$ abgeschätzt wurde, sowie der Fehler der gemessenen Counts N , der hier wie zuvor $s_N = \sqrt{N}$ ist.

Roentgenemissionsspektrum

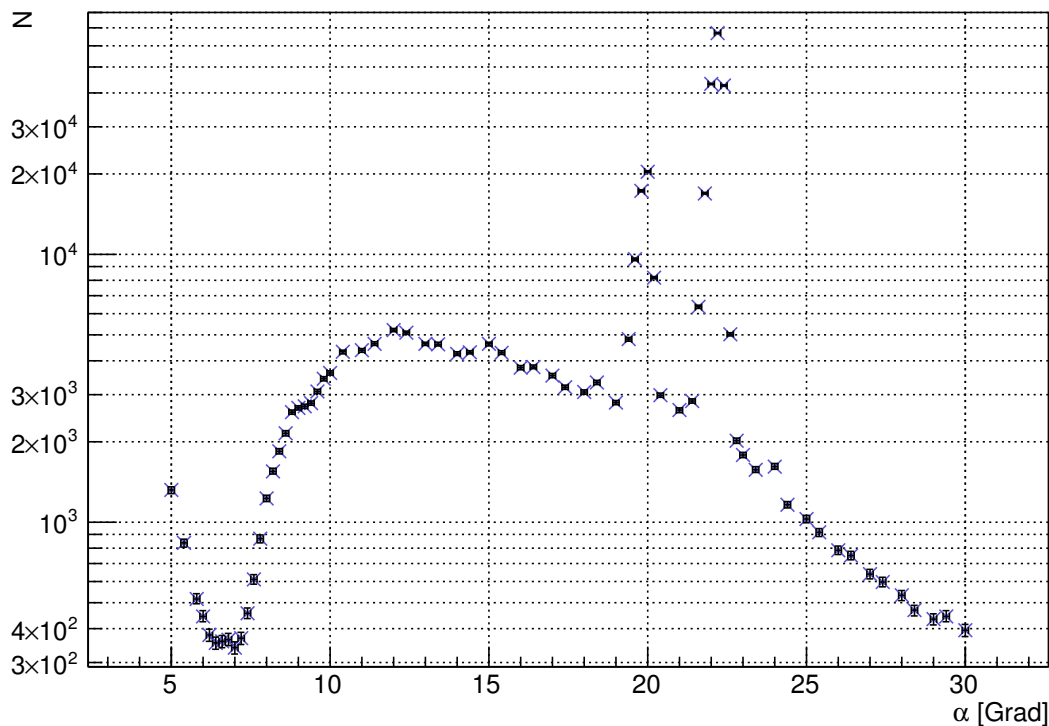


Abbildung 3: Komplettes gemessenes Spektrum der Röntgenstrahlung semilogarithmisch aufgetragen, wobei hier der kontinuierliche Teil, bei dem es sich um die Bremsstrahlung handelt, sowie das Linienspektrum sichtbar ist

5.3 Bestimmung der Gitterkonstante

Zur Bestimmung der Gitterkonstante wird der K_α -Peak vergrößert dargestellt, um den Winkel des Maximums abzulesen. Dies ist in Abbildung 4 zu sehen. Bei den eingezeichneten Fehlerbalken handelt es sich um dieselben wie zuvor.

Das Maximum hat dabei eine endliche Breite, die durch mehrere Faktoren bedingt ist. Zum einen hat die Quelle eine gewisse Ausdehnung, weswegen die Strahlen nicht perfekt parallel einfallen, sondern hier schon leicht unterschiedliche Einfallswinkel haben. Dazu kommt, dass auch der Detektor ausgedehnt ist und daher auch Strahlen mitmisst, die in einem etwas anderen Winkel einfallen. Eine weitere Möglichkeit für die Ausdehnung des Maximums wären Unreinheiten im Kristall, der in diesem Versuchsaufbau verwendet wird.

Um den Winkel zu finden, für den die Anzahl der Counts maximal ist, wird der gemessene Verlauf betrachtet und anhand dessen der Winkel gesucht, für den die höchste Countzahl vermutet wird. Das Maximum muss dabei nicht zwangsweise an einem Messpunkt liegen, sondern kann sich zwischen Messpunkten befinden.

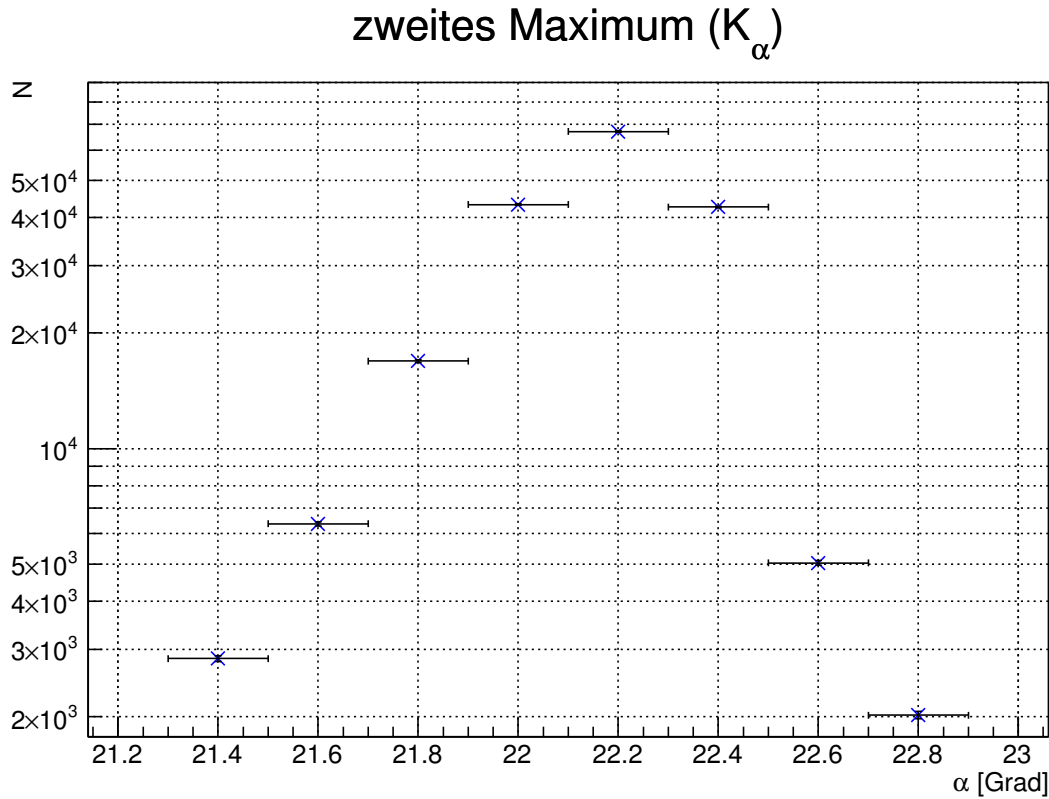


Abbildung 4: Vergrößerung des zweiten Maximums, das die Reflexion der K_α -Strahlung von Kupfer darstellt

Der aus dem Diagramm abgelesene Winkel ist

$$\alpha_\alpha = (22,20 \pm 0,05)^\circ, \quad (5.1)$$

wobei der Ablesefehler hier $s_{\alpha_\alpha} = 0,05^\circ$ beträgt.

Über Gleichung (2.3) lässt sich die Gitterkonstante berechnen, wobei hier gilt $n = 1$, da die erste Beugungsordnung betrachtet wird. Die dafür benötigte Wellenlänge der Cu K_α -Strahlung ist mit $\lambda_{K_\alpha} = 154,2\text{pm}$ [2, S.157] gegeben. Somit ist die berechnete Gitterkonstante hier

$$d = 204,1\text{pm}, \quad (5.2)$$

wobei der Fehler über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung ermittelt werden kann:

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot s_\alpha^2} = \sqrt{\left(\lambda \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha - 1} \cdot s_\alpha\right)^2} = 0,4\text{pm}. \quad (5.3)$$

Dies führt zu einem Ergebnis von

$$d = (204,1 \pm 0,4)\text{pm}. \quad (5.4)$$

Die Einheitszellengröße erhält man dabei über

$$a = 2 \cdot d = (408,2 \pm 0,9)\text{pm}. \quad (5.5)$$

Der Fehler ergibt sich dabei über

$$s_a = 2 \cdot s_d. \quad (5.6)$$

Aus der so bestimmten Gitterkonstante wird anschließend die Wellenlänge der K_β -Strahlung bestimmt.

Dazu wird das zweite Maximum der über die eingestellten Winkel aufgetragenen Counts betrachtet, das Abbildung 5 entnommen werden kann. Auch hier sind die Fehlerbalken dieselben wie bei der Darstellung des kompletten Röntgenspektrums.

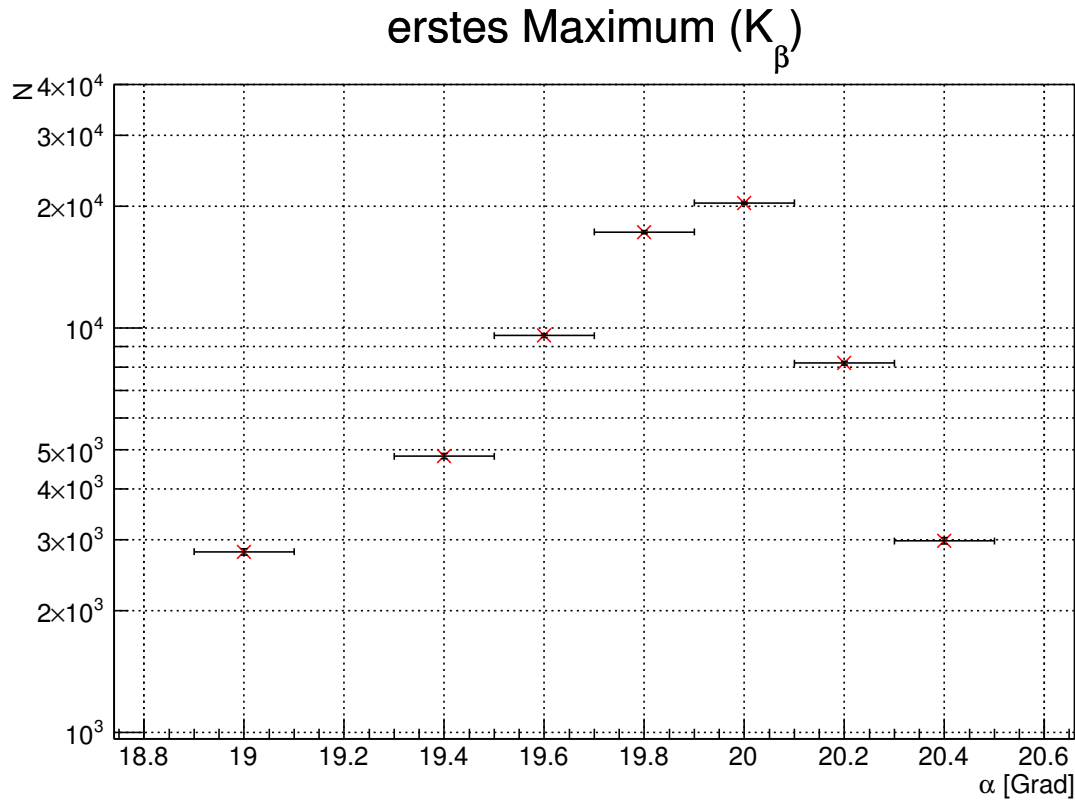


Abbildung 5: Ausschnitt der K_β -Linie zur Bestimmung des Winkels, an dem die Countzahl ihr Maximum erreicht

Das Maximum lässt sich hier in bei einem Winkel von

$$\alpha_\beta = (19,95 \pm 0,05)^\circ \quad (5.7)$$

finden, wobei der Ablesefehler der grafischen Bestimmung auch hier $s_\alpha = 0,05^\circ$ beträgt.

Indem man in Gleichung (2.3) den Winkel und den berechneten Wert der Gitterkonstante einsetzt, kommt man auf eine Wellenlänge von

$$\lambda_\beta = 139,2 \text{ pm}. \quad (5.8)$$

Der Fehler kann über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet werden, sodass man

$$s_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot s_\alpha^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)^2 \cdot s_d^2} = \sqrt{(2d \cos \alpha \cdot s_\alpha)^2 + (2 \sin \alpha \cdot s_d)^2} = 0,4 \text{ pm} \quad (5.9)$$

erhält. Dies führt zu einem Ergebnis von

$$\lambda_\beta = (139,2 \pm 0,4) \text{ pm}. \quad (5.10)$$

5.4 Moseleysches Gesetz

Als Nächstes wird über das Moseleysche Gesetz, zu sehen in Gleichung 2.2, die Wellenlänge der Cu K_α -Strahlung bestimmt. Die dafür benötigten Größen sind die Kernladungszahl von Kupfer, die mit 29 gegeben ist [1, S.98], und die Rydbergenergie, die einen Wert von $Ry = 3,29 \cdot 10^{15} \text{Hz}$ [1, S.98] hat.

Setzt man diese Werte ein, erhält man die Frequenz. Auf die Wellenlänge kommt man über

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (5.11)$$

mit einem Wert für die Lichtgeschwindigkeit c von $c = 299792458 \text{m/s}$ [3, S.1010].

Dies führt zu einer Wellenlänge von

$$\lambda_{K_\alpha} = 155,0 \text{pm}. \quad (5.12)$$

5.5 Bremsstrahlungseinsatz

Bei der Betrachtung des kompletten Röntgenspektrums fällt auf, dass das kontinuierliche Spektrum nicht bei einer Countzahl von 0 beginnt, sondern schon zu Beginn Counts gemessen werden können, die ein Minimum erreichen und dann wieder ansteigen. Diese Counts entstehen dadurch, dass der eingestellte Winkel hier klein ist und die Strahlung hier noch nicht reflektiert wird, sondern am Kristall vorbeiläuft. Um den Einsatz des kontinuierlichen Teils, also den Bremsstrahlungseinsatzes, zu finden, muss der nach dem Minimum ansteigende Teil extrapoliert werden. Mittels Fitting mit PyROOT wird die Parameter der Ausgleichsgerade, die die Form $y = bx + a$ hat, mit Unsicherheiten bestimmt. Dies ist in Abbildung 6 zu sehen. Die Messergebnisse liegen dabei sehr gut auf der Ausgleichsgerade, sodass gesagt werden kann, dass der Beginn der Bremsstrahlung annähernd linear verläuft.

Bremsstrahlungseinsatz

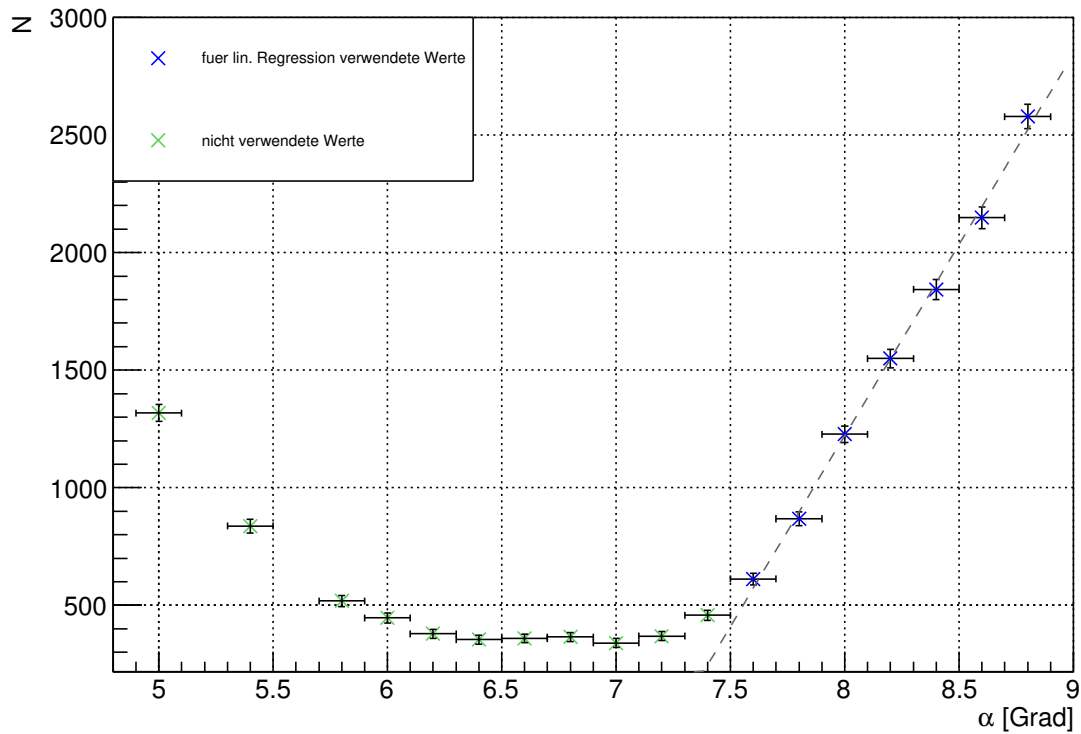


Abbildung 6: Bestimmung des Einsatzpunktes der Bremsstrahlung durch Extrapolation des linearen Anstiegs der Counts. Die grünen Punkte werden dabei nicht zur linearen Regression verwendet, sondern lediglich die blauen, da die grünen nicht zur Bremsstrahlung gehören und der Grund sind, dass hier extrapoliert werden muss.

Für den Achsenabschnitt a mit Unsicherheit erhält man darüber

$$a = (-17700 \pm 1290) \quad (5.13)$$

und für die Steigung b

$$b = (1624 \pm 157) 1/\text{Grad}. \quad (5.14)$$

Auf den Einsatzpunkt der Bremsstrahlung α_{min} kommt man, indem man den Schnittpunkt der Ausgleichsgerade mit der x-Achse berechnet:

$$0 = bx + a \Rightarrow x = \frac{-a}{b}. \quad (5.15)$$

Auf diese Weise erhält man einen Wert von

$$\alpha_{min} = 7,2^\circ, \quad (5.16)$$

wobei sich der Fehler über die Unsicherheiten der Steigung und des Achsenabschnitts zu

$$s_{\alpha_{min}} = \alpha_{min} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2} = 1,1^\circ \quad (5.17)$$

ergibt.

Der Einsatzpunkt der Bremsstrahlung ist somit

$$\alpha_{min} = (7,2 \pm 1,1)^\circ. \quad (5.18)$$

Über Gleichung (2.3) lässt sich die Wellenlänge λ_{min} des Einsatzpunktes bestimmen, die den Wert

$$\lambda_{min} = (51,5 \pm 7,5) \text{ pm} \quad (5.19)$$

hat. Der zugehörige Fehler ergibt sich analog zur Berechnung von λ_β über (5.9), wobei es sich bei α und s_α um die hier berechneten Werte für den Einsatzpunkt handelt.

Über Gleichung (2.1) kann das Plancksche Wirkungsquantum bestimmt werden. Man erhält einen Wert von

$$h = 6,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js.} \quad (5.20)$$

Der Fehler ergibt sich über

$$s_h = h \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{\lambda_{min}}}{\lambda_{min}}\right)^2 + \left(\frac{s_{U_A}}{U_A}\right)^2} = 0,9 \cdot 10^{-34} \text{ Js,} \quad (5.21)$$

sodass das Endergebnis

$$h = (6,05 \pm 0,9) \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (5.22)$$

ist.

6 Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Zählrohrcharakteristik

Durch die Untersuchung der Zählrohrcharakteristik konnte sichergestellt werden, dass für die späteren Versuchsteile eine Spannung eingestellt wird, für die die Anzahl der Counts pro Zeitintervall konstant ist. Auf dieser Grundlage wurde die Spannung von $U = 530\text{V}$ eingestellt.

6.2 Röntgenspektrum

Das hier gemessene Röntgenspektrum setzt sich wie erwartet aus dem kontinuierlichen Teil der Bremsstrahlung und den Maxima zusammen, bei denen es sich um die charakteristischen Linien des Röntgenspektrums handelt. Zusätzlich war hier zu beobachten, dass die gemessene Impulszahl nicht bei 0 beginnt, sodass für die Berechnung von α_{min} extrapoliert werden muss.

Bestimmung der Gitterkonstante

Die über die K_α -Linie berechnete Gitterkonstante des LiF-Kristalls hat einen Wert von

$$d = (204,1 \pm 0,4)\text{pm} . \quad (6.1)$$

Dieser Wert liegt innerhalb eines achtfachen Fehlerintervalls verglichen mit dem auf dem Kristall angegebenen Wert von $d = 201\text{pm}$.

Die Angabe auf dem Kristall hat dabei wahrscheinlich auch eine gewisse Toleranz, in der die tatsächliche Gitterkonstante liegt. Zusätzlich ist es möglich, dass das Maximum der K_α -Linie nicht ganz getroffen wurde und der Ablesefehler zu klein abgeschätzt wurde.

Die damit zusammenhängende Einheitszellengröße a ergibt sich zu

$$a = (408,2 \pm 0,9)\text{pm} . \quad (6.2)$$

Darüber lässt sich die Wellenlänge der K_β -Linie bestimmen, für die man ein Ergebnis von

$$\lambda_\beta = (139,2 \pm 0,4)\text{pm} . \quad (6.3)$$

erhält.

Moseleysches Gesetz

Der über das Moseleysche Gesetz berechnete Wert für die Wellenlänge der K_α -Linie beträgt

$$\lambda_{K_\alpha} = 155,0\text{pm} . \quad (6.4)$$

Dieser stimmt qualitativ betrachtet mit dem gegebenen Wert von

$$\lambda_{K_\alpha} = 154,2\text{pm} \quad (6.5)$$

gut überein, sofern dies ohne eine Fehlerangabe gesagt werden kann.

Die relative Abweichung beträgt dabei 0,5%.

Bremsstrahlungseinsatz

Der über Extrapolation bestimmte Wert für den Einsatzpunkt des Bremsspektrums ist

$$\alpha_{min} = (7,2 \pm 1,1)^\circ. \quad (6.6)$$

Die zugehörige Wellenlänge λ_{min} ist

$$\lambda_{min} = (51,2 \pm 7,5)\text{pm}. \quad (6.7)$$

Das darüber berechnete Plancksche Wirkungsquantum hat den Wert

$$h = (6,05 \pm 0,9) \cdot 10^{-34}\text{Js}. \quad (6.8)$$

Dies stimmt innerhalb einer 1σ -Umgebung mit einem Literaturwert von $6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js}$ [3, S.1163] überein.

7 Literatur

- [1] *Physiklabor für Angänger*innen Teil 2, Teil B Physikalische Grundlagen*
- [2] *Physiklabor für Angänger*innen Teil 2, Teil A Hinweise und Versuchsanleitungen*
- [3] *P.Tipler, G. Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure; 7. Auflage 2008; Berlin, Heidelberg*

8 Anhang

Versuch 83

16.03.2018

Kristall: LiF, $U_A = 20,84V \pm 0,14V$

1. Zählrohrcharakteristik

$\alpha = 12^\circ$

$\Delta t = 30s$

U_A/V	N
300	0
325	0
350	12859
345	0
347	127884
346	4836
355	13136
360	13424
385	13337
410	13679

U_A/V	N
435	13982
460	148263
485	14228
510	14217
535	14254
560	14459
585	14306
610	14397
645	14400
670	14628
695	14686
720	15263
750	15766

Fehler:

U_A : Ablesfehler $\pm 1V$

N :

Röntgenemissionspektrum

$U_Z = 530V, U_A = 20,84V \pm 0,14V$

$S_\alpha = 0,1^\circ$

$\Delta t = 10s$

$\alpha / ^\circ$	N
5,0	1318
3,4	837
6,0	446
6,4	354

$\alpha / ^\circ$	N
7,0	340
7,4	48458
8	1228
8,4	1843
9	2671

$\alpha/^\circ$	N	$\alpha/^\circ$	N	$\alpha/^\circ$	N
3,4	2785	* 22,4	42652	19,6	9581
10	3612	23	1781	19,8	17258
10,4	4323	23,4	1572	20,2	8186
11	4384	24	1616	21,6	6368
11,4	4642	24,4	1163	21,8	16916
12	5229	25	1030	22,2	67075
12,4	5109	25,4	916	22,6	5032
13	4640	26	787	22,8	2018
13,4	4624	26,4	751		
14	4258	27	641		
14,4	4312	27,4	533		
15	4627	28	533		
15,4	4300	28,4	469		
16	3777	29	435		
16,4	3797	29,4	446		
17	3528	30	385		
17,4	3193				
18	3063	Nachmessungen:			
18,4	3322	$\alpha/^\circ$	N	$\alpha/^\circ$	N
19	2786	5,8	318	8,8	2573
19,4	4820	6,2	379	9,2	2711
* 20	20372	6,6	359	9,6	3082
20,4	2976	6,8	365	9,8	3435
21	2621	7,2	369		
21,4	2834	7,6	612		
* 22	43242	7,8	868		
		8,2	1550		
		8,6	2148		

v. V. J. 16.3.