

Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Wintersemester 2019/2020

Versuch 84: Statistische Schwankungen

Gruppe

(durchgeführt am bei)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Abbildungsverzeichnis	4
Tabellenverzeichnis	4
1 Ziel des Versuchs	5
2 Benutzte Gleichungen	5
3 Aufbau und Durchführung	7
3.1 Aufbau	7
3.2 Durchführung	7
4 Messung	8
5 Auswertung	8
5.1 Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichungen	8
5.2 Berechnung der Schiefe und Kurtosis	9
5.3 Graphische Betrachtung	10
6 Diskussion	13
6.1 Diskussion von Mittelwerten und standardabweichungen	13
6.2 Diskussion der Schiefe und Kurtosis	14
6.3 Diskussion der graphischen Betrachtung	15
7 Anhang	17
8 Literaturverzeichnis	20

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	7
2	Häufigkeitsverteilung der ersten Messreihe, bei mäßig hoher Zählrate, mit aus dem Mittelwert berechneter Gaußverteilung	11
3	Häufigkeitsverteilung der zweiten Messreihe, bei reduzierter Zählrate, mit aus dem Mittelwert berechneter Gaußverteilung und Poissonverteilung	12
4	Häufigkeitsverteilung der dritten Messreihe, bei sehr niedriger Zählrate, mit aus dem Mittelwert berechneter Gaußverteilung und Poissonverteilung	13
5	Laborheft	19

Tabellenverzeichnis

1	Zusammenfassung der berechneten Mittelwerte und Standardabweichungen für unterschiedlich hohe Zählraten	13
2	Zusammenfassung, der für die Schiefe und die Kurtosis der Messreihen berechneten Werte, für unterschiedlich hohe Zählraten . . .	14
3	Prozentuale Abweichung von der jeweiligen Kurtosis und Schiefe	14
4	Häufigkeiten der ersten Messreihe	17
5	Häufigkeiten der zweiten Messreihe	18
6	Häufigkeiten der dritten Messreihe	18

1 Ziel des Versuchs

Ziel des Versuches ist es, dass charakteristische Verhalten von radioaktivem Zerfall zu untersuchen. Hierzu werden die gemessenen Verteilungen mit Gauß- und Poisson-Verteilungen verglichen.

2 Benutzte Gleichungen

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von x Zerfällen im Zeitintervall t ist bei einer Binomialverteilung gegeben durch:

$$P_{\text{Binomial},N,p}(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} \quad (1)$$

Wobei N die Anzahl an radioaktiven Proben und p die Wahrscheinlichkeit für deren Zerfall im Zeitintervall t ist.

Im Grenzfall $p \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ mit $\mu = N \cdot p = \text{const.}$ lässt sich die Verteilung sehr gut durch eine Poissonverteilung annähern und die obige Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$P_{\text{Poisson},\mu}(x) = \frac{1}{x!} \mu^x e^{-\mu} \quad (2)$$

Wenn μ groß genug ist, lässt sich die Verteilung auch durch eine Gaußkurve beschreiben. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$P_{\text{Gauss},\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}} \quad (3)$$

Die zentralen Momente einer Verteilungsfunktion, berechnen sich folgendermaßen:

$$c_k = \langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle \quad (4)$$

Der Mittelwert einer Verteilung ist definiert durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n x_j N_j \quad (5)$$

Die Varianz einer Verteilung ist folgendermaßen definiert:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (6)$$

Aus der Wurzel der Varianz ergibt sich die Standardabweichung s_x

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (7)$$

Aus der Standardabweichung lässt sich die Standardabweichung des Mittelwerts berechnen:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

Die Schiefe einer Verteilung ist gegeben durch:

$$S = c_3(\mu)/\sigma^3 \quad (9)$$

Genauer berechnet sich die Schiefe also mit:

$$S = \frac{1}{\sigma^3} \sum \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \cdot \frac{1}{N} \quad (10)$$

Die Kurtosis einer Verteilung ist gegeben durch:

$$K = c_4(\mu)/\sigma^4 - 3 \quad (11)$$

Mit der Definition von $c_4(\mu)$ ergibt sich die Kurtosis also folgendermaßen:

$$K = \left[\frac{1}{\sigma^4} \sum \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle \cdot \frac{1}{N} \right] - 3 \quad (12)$$

Die mittlere Zählrate und deren Unsicherheit berechnet sich mit:

$$\bar{\dot{x}} = \frac{\bar{x}}{\Delta t} \quad (13)$$

$$s_{\bar{\dot{x}}} = \frac{s_{\bar{x}}}{\Delta t} \quad (14)$$

Mit der Annahme, dass eine Poisson-Verteilungen zugrunde liegt, lassen sich Schiefe, Kurtosis, Varianz und Standardabweichung berechnen durch:

$$\begin{aligned} S_{\text{Poisson}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ K_{\text{Poisson}} &= \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \sqrt{\bar{x}} \\ \sigma^2 &\approx \bar{x} \end{aligned} \quad (16)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

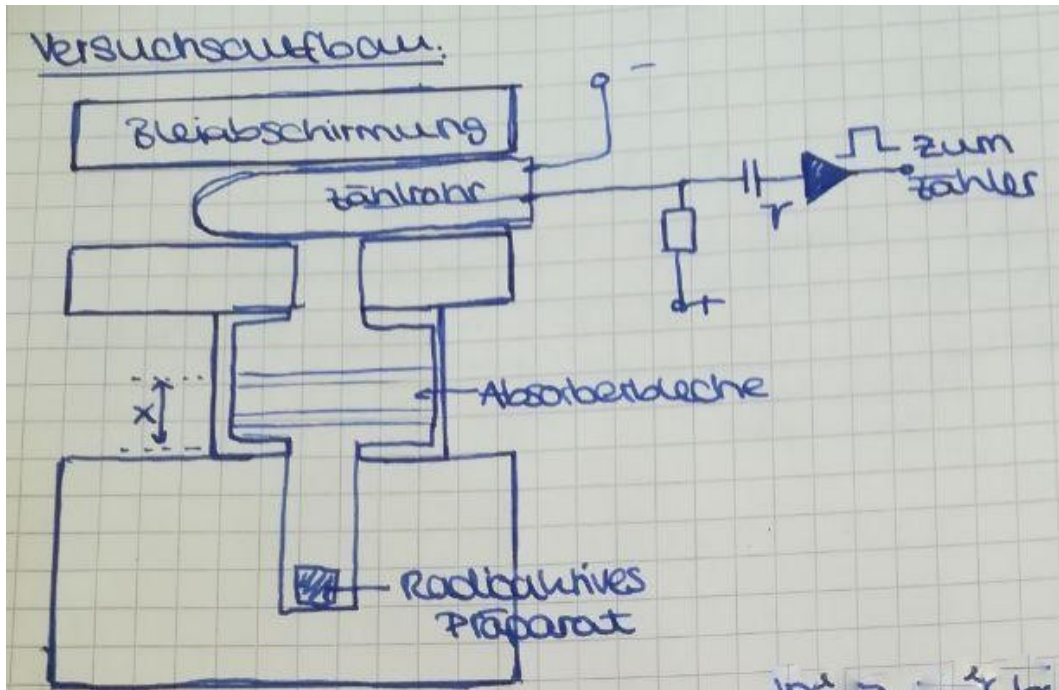


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in [Abbildung 1](#) dargestellt. Er besteht aus einem radioaktiven Präparat, das in einer Bleiabschirmung liegt. Die γ -Strahlung, die beim radioaktiven Zerfall entsteht, kann durch ein enges Loch aus der Bleiabschirmung austreten und trifft auf das Geiger-Müller-Zählrohr. Zwischen Zählrohr und Präparat besteht die Möglichkeit verschiedene Absorberbleche einzuschieben, um die Strahlung abzuschirmen. Die Daten des Zählrohrs werden an einen Computer weitergegeben. Dort können mit dem Programm LabView die Zeitintervalle eingestellt werden, in welchen die Impulse gemessen werden sollen.

3.2 Durchführung

Es werden drei Messreihen durchgeführt. In der ersten Messung wird ein Zeitintervall von zwei Sekunden gewählt und es werden zwei Kupfer-Absorberblech eingeschoben. So werden die gewünschten 20 bis 30 Impulse pro Zeiteinheit erreicht. Insgesamt werden 400 Zeitintervalle gemessen und jeweils die Anzahl der Impulse von LabView gespeichert.

Bei der zweiten Messung wird die Anzahl an Absorberblechen erhöht, so dass in einem Intervall von einer Sekunde nur noch vier bis sechs Impulse registriert werden.

Hier wird insgesamt 500 mal gemessen.

Als letztes wird ein Bleiblock zwischen das radioaktive Präparat und das Zählrohr geschoben um nur noch die Höhenstrahlung und Hintergrundradioaktivität zu messen. Hier wird ein Zeitintervall von zwei Sekunden gewählt, so dass durchschnittlich nur noch ein bis zwei Impulse pro Zeiteinheit registriert werden. Es wird die Anzahl der Impulse für 400 Zeiteinheiten gemessen.

4 Messung

Die am Zählrohr angelegte Spannung lag während der Messung bei: $U = 641 \text{ V}$

Die gemessenen Häufigkeiten sind in [Tabelle 4](#), [Tabelle 5](#) und [Tabelle 6](#) im Anhang aufgeführt.

1. Messung:

Um die gewünschte Anzahl an Impulsen zu erhalten, wurden zwei Kupfer-Absorberbleche zwischen das radioaktive Präparat und das Zählrohr geschoben. Diese hatten eine Dicke von: $d_1 = 6,1 \text{ mm}$ Es wurden Zeitintervalle von $t_1 = 2 \text{ s}$ gemessen.

2. Messung:

Hier wurden um die gewünschte Anzahl an Impulsen zu erhalten mehrere Kupfer-Absorberbleche ($d_{2\text{Kupfer}} = 21,2 \text{ mm}$) und ein Blei-Absorberblech ($d_{2\text{Blei}} = 3,00 \text{ mm}$) zwischen das Präparat und das Zählrohr geschoben. Es wurden 500 Messungen im Zeitintervall von jeweils $t_2 = 1 \text{ s}$ gemessen.

3. Messung: Für die dritte Messung wurde das radioaktive Präparat mit einem Blei Block der Dicke $d_3 = 41,9 \text{ mm}$ komplett vom Zählrohr abgeschirmt. Es wurde ein Zeitintervall von $t_3 = 2 \text{ s}$ gewählt um pro Zeitintervall ungefähr zwischen ein bis zwei Impulsen zu erhalten.

Insgesamt wurden 400 Messungen durchgeführt.

5 Auswertung

Die Auswertung für alle drei Versuchsteile folgt dem selben Prinzip, weshalb im folgenden alle drei Messreihen zusammen ausgewertet werden.

5.1 Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichungen

Die aus [Gleichung 5](#) berechneten Mittelwerte lauten:

$$\begin{aligned}\overline{x_1} &= 25,793 \\ \overline{x_2} &= 5,164 \\ \overline{x_3} &= 1,495\end{aligned}\tag{17}$$

Berechnet man die Varianz für die Annahme einer Normalverteilung erhält man:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 25,067 \\ \sigma^2 &= 4,995 \\ \sigma^2 &= 1,474\end{aligned}\tag{18}$$

Die Stichproben-Standardabweichungen berechnen sich nach [Gleichung 7](#) und ergeben folgende Werte:

$$\begin{aligned}s_{x_1} &= 5,067 \\ s_{x_2} &= 2,235 \\ s_{x_3} &= 1,214\end{aligned}\tag{19}$$

Daraus lassen sich die Standardabweichungen des Mittelwerts nach [Gleichung 8](#) berechnen:

$$\begin{aligned}s_{\bar{x}_1} &= 0,064 \\ s_{\bar{x}_2} &= 0,010 \\ s_{\bar{x}_3} &= 0,004\end{aligned}\tag{20}$$

Die Standardabweichungen der Mittelwerte können als Unsicherheiten für die Mittelwerte angenommen werden. Unter der Annahme, dass eine Poisson-Verteilung zugrunde liegt, kann die Unsicherheit für den Mittelwert durch [Gleichung 16](#) berechnet werden. Daraus ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}\sqrt{\bar{x}_1} &= 5,079 \\ \sqrt{\bar{x}_2} &= 2,235 \\ \sqrt{\bar{x}_3} &= 1,223\end{aligned}\tag{21}$$

Die Zählraten und deren Unsicherheiten ergeben nach [Gleichung 13](#) und [Gleichung 14](#):

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= (12,90 \pm 0,03) \text{ Hz} \\ \bar{x}_2 &= (5,164 \pm 0,010) \text{ Hz} \\ \bar{x}_3 &= (0,748 \pm 0,002) \text{ Hz}\end{aligned}\tag{22}$$

5.2 Berechnung der Schiefe und Kurtosis

Berechnet man die Schiefe für alle drei Messreihen nach [Gleichung 10](#) erhält man folgende Werte:

$$\begin{aligned}S_1 &= 0,184 \\ S_2 &= 0,544 \\ S_3 &= 0,909\end{aligned}\tag{23}$$

Aus [Gleichung 12](#) ergeben sich folgende Werte der Kurtosis für die Messreihen:

$$\begin{aligned} K_1 &= 0,414 \\ K_2 &= 0,167 \\ K_3 &= 0,962 \end{aligned} \tag{24}$$

Zum Vergleich berechnen wir nun nach [Gleichung 15](#) die Schiefe und Kurtosis unter der Annahme, dass es sich um eine Poisson-Verteilung handelt.

$$\begin{aligned} S_{\text{Poisson},1} &= 0,197 \\ S_{\text{Poisson},2} &= 0,440 \\ S_{\text{Poisson},3} &= 0,818 \end{aligned} \tag{25}$$

$$K_{\text{Poisson},1} = 0,039 \tag{26}$$

$$K_{\text{Poisson},2} = 0,194 \tag{27}$$

$$K_{\text{Poisson},3} = 0,667 \tag{28}$$

5.3 Graphische Betrachtung

Zum vergleichen der gemessenen Daten mit der Gauß- und der Poissonverteilung wurden zunächst die Häufigkeitswerte ausgerechnet:

$$\begin{aligned} H_{\text{Gauß},\bar{x}} &= n \cdot P_{\text{Gauß},\bar{x}} \\ H_{\text{Poisson},\bar{x}} &= n \cdot P_{\text{Poisson},\bar{x}} \end{aligned} \tag{29}$$

Diese Werte wurden mit den gemessenen Werten in einem Histogramm dargestellt, wobei im ersten Schaubild nur die Häufigkeitswerte der Gaußverteilung eingezeichnet wurden:

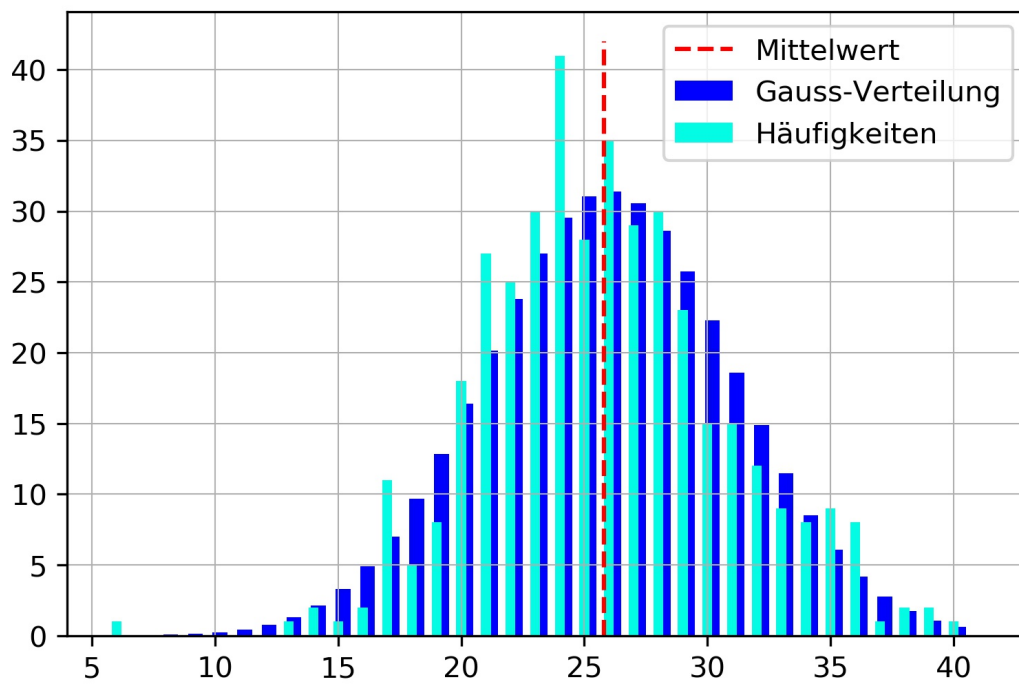


Abbildung 2: Häufigkeitsverteilung der ersten Messreihe, bei mäßig hoher Zählrate, mit aus dem Mittelwert berechneter Gaußverteilung

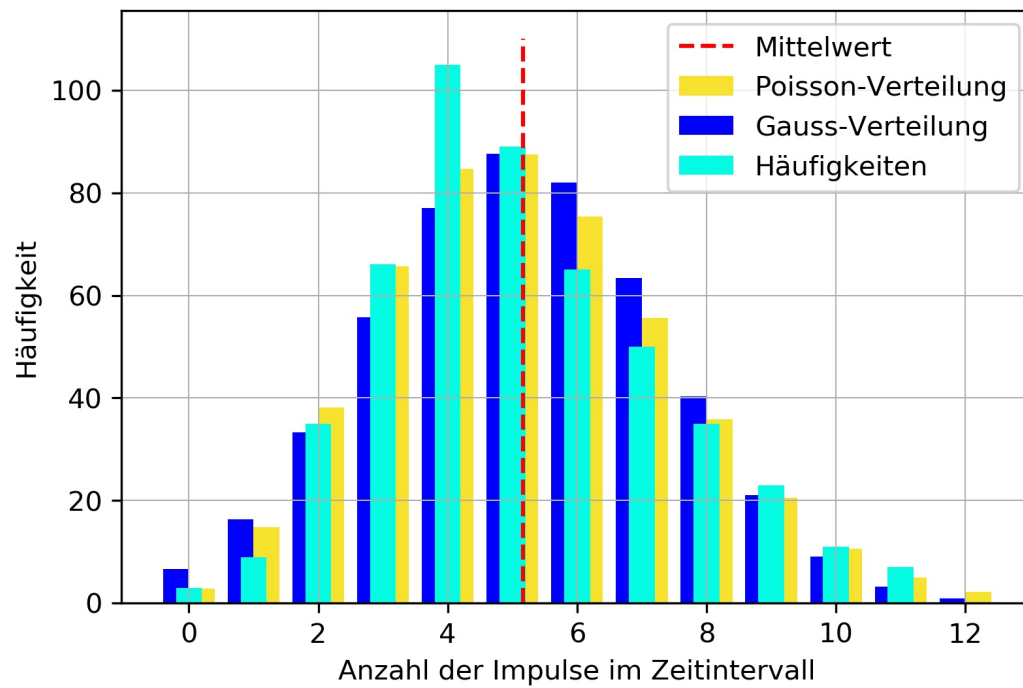


Abbildung 3: Häufigkeitsverteilung der zweiten Messreihe, bei reduzierter Zählrate, mit aus dem Mittelwert berechneter Gaußverteilung und Poissonverteilung

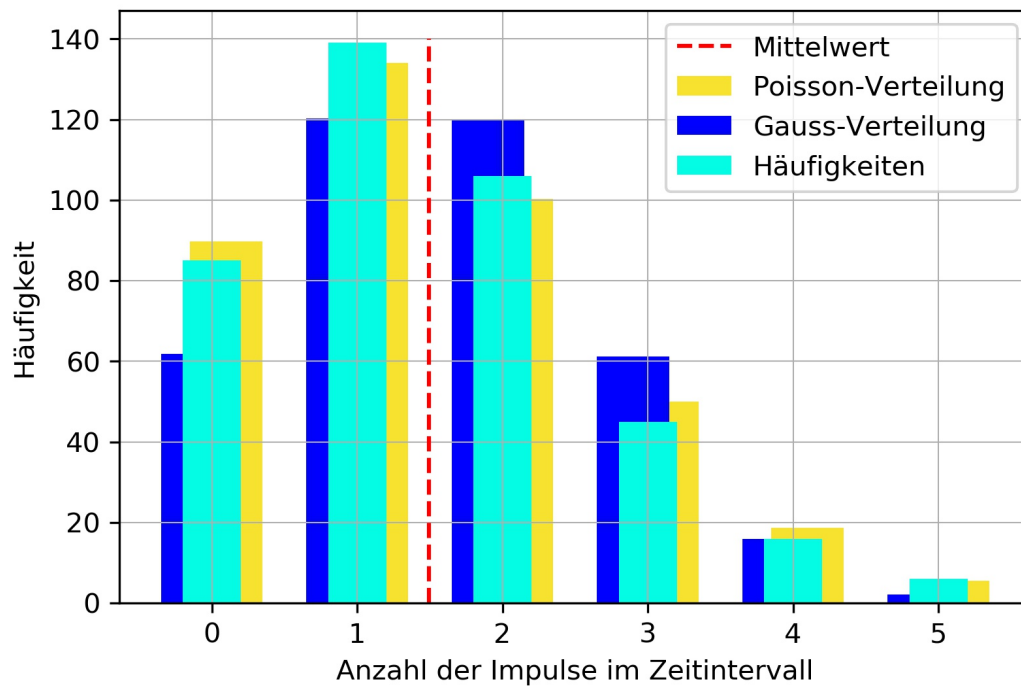


Abbildung 4: Häufigkeitsverteilung der dritten Messreihe, bei sehr niedriger Zählrate, mit aus dem Mittelwert berechneter Gaußverteilung und Poissonverteilung

6 Diskussion

6.1 Diskussion von Mittelwerten und standardabweichungen

In der folgenden Tabelle sind unsere berechneten Werte für den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwerts, die Unsicherheit des Mittelwerts für den Fall das eine Poissonverteilung vorliegt und die Zählrate mit Unsichereheit zusammengefasst:

	$\bar{x}$	σ^2	s_x	$s_{\bar{x}}$	$\sqrt{\bar{x}}$	$\bar{x}$ [Hz]
mäßig hohe Zählrate	25,793	25,067	5,067	0,064	5,079	12,90±0,03
reduzierte Zählrate	5,164	4,995	2,235	0,010	2,235	5,164±0,010
sehr niedrige Zählrate	1,495	1,474	1,214	0,004	1,223	0,748±0,002

Tabelle 1: Zusammenfassung der berechneten Mittelwerte und Standardabweichungen für unterschiedlich hohe Zählraten

Vergleicht man die Standardabweichung der Messreihe mit der Unsicherheit für den Mittelwert unter der Annahme, dass sich eine Poissonverteilung vorliegt, so sieht man, dass die Abweichungen sehr klein sind. Die größte Abweichung (mit 0,012) liegt

bei der Messung mit mäßig hoher Zählrate vor. Dies deutet daraufhin, dass die Näherung einer Poissonverteilung für die Berechnung der Unsicherheit des Mittelwerts gerechtfertigt ist.

Entsprechend lassen sich auch der Mittelwert $\bar{x}$ und die Varianz σ^2 vergleichen. Da dies jedoch genau den quadrierten Werten von $\sqrt{\bar{x}}$ und s_x entspricht weichen auch diese beiden Werte nur wenig voneinander ab.

6.2 Diskussion der Schiefe und Kurtosis

Für die Schiefe und die Kurtosis wurden für die drei Messreihen folgende Werte berechnet:

	Schiefe		Kurtosis	
	S	S_{Poisson}	K	K_{Poisson}
mäßig hohe Zählrate	0,184	0,197	0,414	0,039
reduzierte Zählrate	0,544	0,440	0,167	0,194
sehr niedrige Zählrate	0,909	0,818	0,962	0,667

Tabelle 2: Zusammenfassung, der für die Schiefe und die Kurtosis der Messreihen berechneten Werte, für unterschiedlich hohe Zählraten

Betrachtet man die Schiefe, so fällt auf, dass diese bei höherer Zählrate immer weiter abnimmt. Die Verteilung nähert sich also für höhere Zählraten einer Gaußverteilung an bei der für die Schiefe und die Kurtosis gilt:

$$K_{\text{Gauß}} = S_{\text{Gauß}} = 0 \quad (30)$$

Insbesondere bei der sehr niedrigen Zählrate ist die Schiefe recht groß, was aussagt, dass die Verteilung sehr asymmetrisch ist und somit nicht durch eine Gaußverteilung, sondern nur durch eine Poissonverteilung beschrieben werden kann. Im Gegensatz dazu wird die aus den Messwerten berechnete Kurtosis nicht wie die der theoretischen Poissonverteilung kleiner. Um die Kurtosis und die Schiefe der Poissonverteilung jeweils mit der Kurtosis und der Schiefe aus den Messwerten besser vergleichen zu können, wird jeweils die prozentuale Abweichung berechnet:

	$1 - \frac{S_{\text{Poisson}}}{S}$	$1 - \frac{K_{\text{Poisson}}}{K}$
mäßig hohe Zählrate	0,07	-0,91
reduzierte Zählrate	-0,19	0,16
sehr niedrige Zählrate	-0,10	-0,30

Tabelle 3: Prozentuale Abweichung von der jeweiligen Kurtosis und Schiefe

Betrachtet man die erste Messreihe mit mäßig hoher Zählrate, so sieht man schnell, dass die prozentuale Abweichung der beiden Schiefen nur bei 7 Prozent

liegt. Die Verteilung scheint sich also sehr ähnlich wie eine zum Mittelwert berechnete Poissonverteilung zu verhalten. Betrachtet man jedoch die Kurtosis, so sieht man das die Abweichung sehr groß ist. Auf diese Abweichung wird in der graphischen Betrachtung genauer eingegangen. Die Prozentuellen Abweichungen der beiden anderen Messreihen ist deutlich kleiner. Hier liegt die maximale Abweichung bei der Messung mit sehr niedriger Zählrate bei 30 Prozent. Die Annahme dass es sich hier um eine Poissonverteilung handelt ist hier also berechtigt.

6.3 Diskussion der graphischen Betrachtung

Betrachtet man die graphische Darstellung der Häufigkeiten aus Messreihe 1 (vgl. [Abbildung 2](#)) so fällt zunächst auf, dass der grobe Verlauf der Messwerte mit der, aus dem berechneten Mittelwert bestimmten Gaußverteilung übereinstimmt. Die Gaußverteilung wird hier aufgrund der relativ hohen Anzahl an Ereignissen (also Impulsen) als Näherung der Poissonverteilung verwendet.

Allerdings sind einige größere Abweichungen der Messwerte von der Gaußverteilung zu sehen. Ein Grund hierfür könnte unter anderem die relativ kleine Anzahl an Einzelmessungen ($N=400$) sein. Da die größeren Abweichungen bei der Berechnung der Kurtosis verstärkt zum Tragen kommen, ist die Kurtosis, die aus den Messwerten berechnet ist relativ groß ($K_1 = 0,414$), obwohl die Verteilung grundsätzlich gut mit der Gaußverteilung übereinstimmt, bei der sie jedoch verschwinden müsste.

Berechnet man die Kurtosis unter der Annahme einer Poissonverteilung, so erhält man einen sehr kleinen Wert ($K_{\text{Poisson},1} = 0,039$, was zeigt, dass die Näherung durch eine Gaußverteilung beim Mittelwert dieser Messreihe eigentlich gut gerechtfertigt ist.

In der graphischen Darstellung der Ergebnisse der zweiten Messreihe (vgl. [Abbildung 3](#)) stimmt der Verlauf der gemessenen Häufigkeitsverteilung sowohl mit der Gauß-, als auch mit der Poissonverteilung gut überein. Die Abweichung der Gaußverteilung erscheint allerdings insgesamt etwas größer als die der Poissonverteilung.

Bei der Betrachtung der Graphik für die dritte Messreihe (vgl. [Abbildung 4](#)) fällt auf, dass die Poissonverteilung der Verteilung der Messwerte deutlich mehr ähnelt als die Gaußverteilung. Diese Diskrepanz bestätigt auch, dass eine relativ hohe Anzahl an Ereignissen als Voraussetzung für eine berechtigte Näherung der Poissonverteilung als Gaußverteilung nötig ist.

Insgesamt sieht man also eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretisch berechneten statistischen Verteilungen und unseren Messwerten.

7 Anhang

Anzahl Impulse im Zeitintervall	Häufigkeit
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	1
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	1
14	2
15	1
16	2
17	11
18	5
19	8
20	18
21	27
22	25
23	30
24	41
25	28
26	35
27	29
28	30
29	23
30	15
31	15
32	12
33	9
34	8
35	9
36	8
37	1
38	2
39	2
40	1

Tabelle 4: Häufigkeiten der ersten Messreihe

Anzahl Impulse im Zeitintervall	Häufigkeit
0	3
1	9
2	35
3	66
4	105
5	89
6	65
7	50
8	35
9	23
10	11
11	7
12	0

Tabelle 5: Häufigkeiten der zweiten Messreihe

Anzahl Impulse im Zeitintervall	Häufigkeit
0	85
1	139
2	106
3	45
4	16
5	6

Tabelle 6: Häufigkeiten der dritten Messreihe

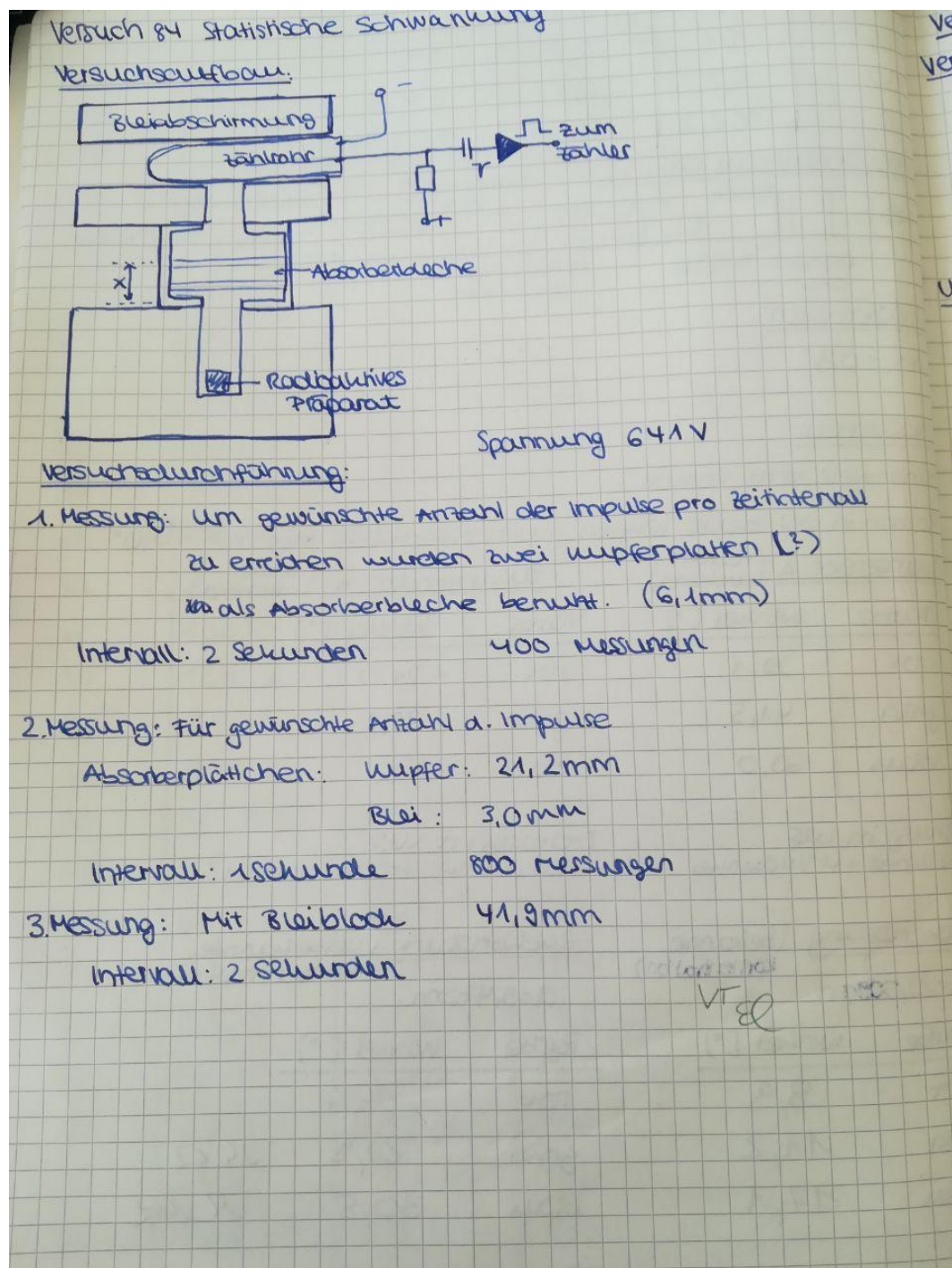


Abbildung 5: Laborheft

8 Literaturverzeichnis

[1] Versuchsanleitungen, Physik Labor für Anfänger Teil 2, Universität Freiburg