

Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Wintersemester 2018/19

Versuch 24:
Statistische Schwankungen und
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

(durchgeführt am 11.03.2019)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
1 Ziel des Versuchs	1
2 Versuchsaufbau und Durchführung	1
2.1 Aufbau	1
2.2 Durchführung	2
3 Überblick über die verwendeten statistischen Methoden	3
4 Auswertung und Fehleranalyse	5
4.1 Messung mit mäßig hoher Zählrate	5
4.2 Messung mit reduzierter Zählrate	6
4.3 Messung mit sehr niedriger Zählrate	7
5 Diskussion der Ergebnisse	8
5.1 Vergleich der Fits bei unterschiedlichen Zählraten	8
5.2 Betrachtung des allgemein angenommenen Poissonfehlers $\sqrt{N}$	11
Abbildungsverzeichnis	12
Literatur	12

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll sich, mit Hilfe eines Zähl-experiments, mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und ihren Eigenschaften vertraut gemacht werden.

2 Versuchsaufbau und Durchführung

2.1 Aufbau

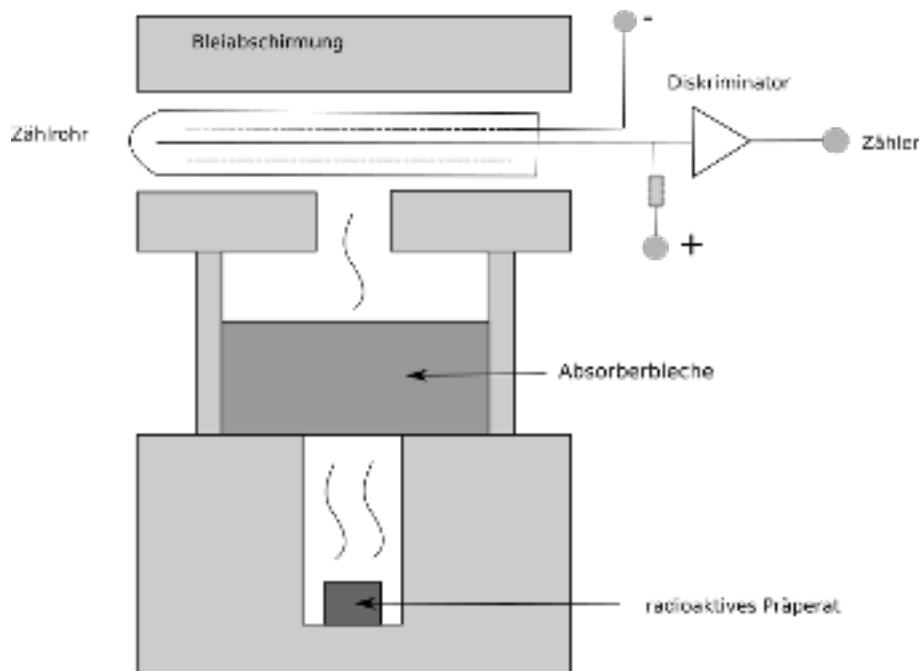


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Der Versuchsaufbau (Abb. 1) besteht aus einem bis auf eine Aussparung durch Blei abgeschirmten radioaktiven Präparat. In diesem Versuch handelt es sich bei der Strahlungsquelle um $^{137}_{55}\text{Cs}$ welches sich unter Aussendung eines Elektrons in $^{137}_{56}\text{Ba}$ umwandelt. Im Versuch untersucht werden allerdings γ -Quanten, welche entstehen, wenn der angeregte Bariumkern in seinen Grundzustand übergeht.

Die γ -Strahlung wird mit Hilfe eines Müller-Geiger-Zählrohrs gemessen und das Zählergebnis direkt an ein Auswertungsprogramm am Computer weitergegeben. Das Zählrohr wird mit einer vom restlichen Aufbau unabhängigen Spannung betrieben.

In eine Aussparung des Versuchsaufbaus können unterschiedliche Absorberplatten unterschiedlicher Dicke eingeschoben werden um so die Strahlung abzuschirmen.

Im Computerprogramm kann sowohl ein zeitlicher Verlauf der Zählrate, als auch ein Histogramm der Häufigkeit der Zählraten angezeigt werden. Außerdem kann man die Messergebnisse exportieren und zur Auswertung speichern.

2.2 Durchführung

Vor Beginn der Theorieabfrage wurde das Hochspannungsgerät eingeschaltet, sodass es sich das Zählrohr stabilisieren kann und die Messergebnisse konstant sind.

Messung mit mäßig hoher Zählrate

Zur Messung mäßig hoher Zählrate wurde der Bleiziegel zwischen Präperat und Zählrohr entfernt und eine Testmessung durchgeführt um ein Messintervall zu identifizieren in dem ca. 20-30 Impulse registriert werden. Bei unserem Aufbau wurde $t = 2\text{ s}$ gewählt. Dann wurden ca. 400 Messungen der Zählrate aufgenommen und die Werte und entstehenden Diagramme gespeichert.

Messung mit reduzierter Zählrate

Um eine reduzierte Zählrate zu erreichen wurde das radioaktive Präperat mit Kupferplatten einer Gesamtdicke von $(38,10 \pm 0,05)\text{ mm}$ abgeschirmt. Die Zählzeit wurde beibehalten und so im Durchschnitt ca. 7 Counts gemessen. Mit dieser Einstellung wurden nun wieder ca. 400 Messungen der Zählrate aufgenommen und gespeichert.

Messung bei sehr niedriger Zählrate

Für eine niedrige Zählrate wurde der Bleiblock wieder in die Lücke zwischen Präperat und Zählrohr eingeführt und das Messintervall auf $t = 1\text{ s}$ verkürzt. Somit wurden bei einer Testmessung im Mittel ein bis zwei Counts gemessen. Wiederum wurden mit dieser Einstellung ca. 400 Messungen der Zählrate aufgenommen und gespeichert.

3 Überblick über die verwendeten statistischen Methoden

Zählexperimente

Die erwartete Häufigkeitsverteilung bei Zählexperimenten dieser Art ist im Allgemeinen eine Binomialverteilung. Für sehr große N und kleine Wahrscheinlichkeiten p und $pN = \text{const.}$ kann die Binomialverteilung sehr gut durch eine Poissonverteilung angenähert werden, welche deutlich einfacher zu handhaben ist. Die Poissonverteilung ist allgemein gegeben durch

$$f_{\text{Poisson}}(k, \lambda = Np) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

mit dem Erwartungswert $\langle k \rangle = \lambda = Np$ und Standardabweichung $\sigma^2 = \lambda$.

Für eine große mittlere Zerfallszahl λ kann man die Poissonverteilung durch eine Gaußverteilung nähern

$$f_{\text{Gauß}}(k, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{(k - \lambda)^2}{2\lambda}\right) \quad ,$$

wobei auch hier, da der Übergang von Poisson nach Gauss betrachtet wird, $\sigma^2 = \lambda$ gelten soll.

Zu beachten ist, dass es sich bei beiden Verteilungen um diskrete Funktionen handelt und die Standardabweichung vom Erwartungswert der Verteilungsfunktion abhängt.

Nutzt man die Beziehung $\sigma^2 = \lambda$ so ergibt sich auch der bekannte Poissonfehler auf eine gemessene Zählrate:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \stackrel{*}{=} \sqrt{N} \quad .$$

*für eine Einzelmessung

Momente von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Neben der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann eine Verteilungsfunktion auch durch ihre zentralen Momente definiert werden. Die zentralen Momente sind Allgemein über

$$c_i = E((k - E(k))^i)$$

definiert, wobei es sich bei $E(k)$ um den Erwartungswert handelt, welcher durch

$$E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} k f(k) dk$$

oder für diskrete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen über

$$E(k) = \sum_{\text{Def.bereich}} x_i p_i$$

gegeben ist.

Das erste zentrale Moment,

$$c_1 = E(k - E(k)) = E(k - \lambda) = E(k) - \lambda = 0$$

definiert den Mittelwert λ einer Größe k .

Das zweite zentrale Moment ist die Definition der Varianz:

$$c_2 = V = E((k - \lambda)^2) \quad .$$

Die Varianz kann man auch als Breite der Verteilung ansehen oder als Maß für Abweichung der Messwerte vom Mittelwert. Später in der Auswertung genutzt wird nicht die Varianz, sondern die Wurzel davon, also

$$\sigma_k = \sqrt{V} = \sqrt{E((k - \lambda)^2)} \quad .$$

Das dritte zentrale Moment ist die Schiefe, welche eine Aussage über die Asymmetrie einer Verteilung macht. Normiert man den allgemeinen Ausdruck mit Hilfe der Standardabweichung, so ergibt sich:

$$S = \frac{1}{\sigma^3} E((k - \lambda)^3) \quad .$$

Das vierte zentrale Moment mit Normierung

$$K = \frac{1}{\sigma^4} E((k - \lambda)^4) - 3$$

heißt Kurtosis und lässt Aussage über die Abweichung der Verteilung von der Standardnormalverteilung zu. Handelt es sich bei der untersuchten Funktion um eine Standardnormalverteilung so gilt $K = 0$. Ein negativer Wert gibt also eine Verdichtung der Werte um den Mittelwert an, während ein positiver Wert für viele Messwerte in den Randbereichen spricht.

Schätzer

Es lassen sich beste Schätzer für die verschiedenen zentralen Momente/ die normierten zentralen Momente der Messung bestimmen

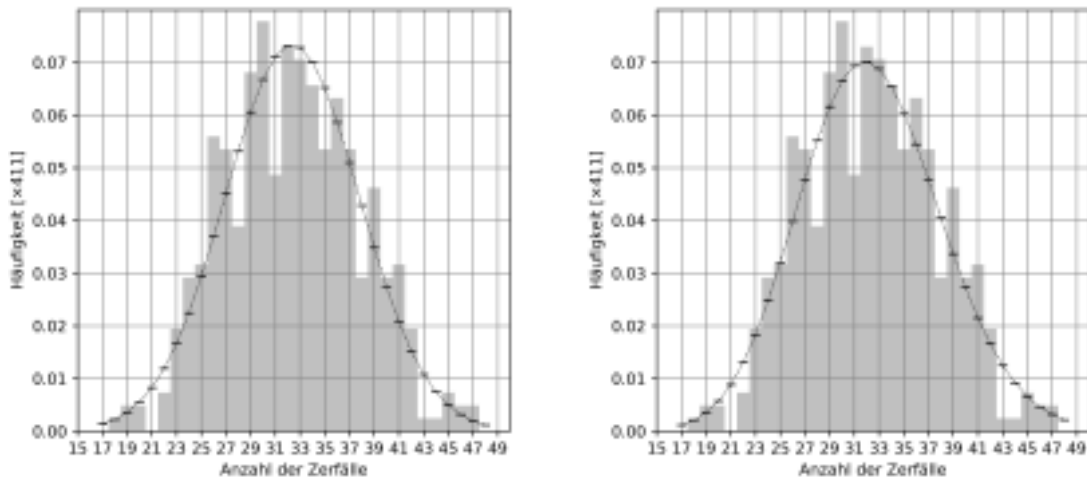
Tabelle 1: Erwartungstreue Schätzer für unterschiedliche Parameter

Mittelwert	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Varianz	$\hat{V} = s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Schiefe	$\hat{S}_m = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$
Wölbung	$\hat{K} = \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^4 \right) - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$

4 Auswertung und Fehleranalyse

4.1 Messung mit mäßig hoher Zählrate

Um zu überprüfen mit welcher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der γ -Zerfall für mäßig hohe Zählraten beschrieben werden kann, wird in Abb. 2 zunächst ein optischer Vergleich zwischen Poisson- und Gaussverteilung geschaffen.



(a) Histogramm der Zählraten mit Gauss-Fit

(b) Histogramm der Zählraten mit Poisson-Fit

Abbildung 2: Histogramme zur Messung mit mäßig hoher Zählrate. Die Verbindungslinien dienen lediglich Anschaulichkeit es handelt sich jedoch um diskrete Funktionen (dies gilt auch für alle folgenden Abbildungen).

Um nun empirisch zu untersuchen, welche Beschreibung passend ist, werden Signifikante Größen der Stichprobe berechnet und mit den theoretischen Werten der Poissonverteilung und der Gaussverteilung verglichen. Hierzu wurden die in Abschnitt 3 gezeigten Rechenvorschriften verwendet.

Die aus der Stichprobe berechneten Werte betragen

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 32,36 & s_{\bar{x}} &= 0,27 \\ s_x &= 5,44 & \sqrt{\bar{x}} &= 5,69 \\ S &= 0,126 & K &= -0,313\end{aligned}$$

Die theoretischen Werte für die Gauss - bzw. Poissonverteilung (für $\mu = \bar{x}$ und $\sigma = s_x$) betragen

$$\begin{aligned}S_{\text{Poisson}} &= 0,176 & K_{\text{Poisson}} &= 0,03 \\ S_{\text{Gauß}} &= 0 & K_{\text{Gauß}} &= 0\end{aligned}$$

Außerdem wurde die mittlere Zählrate und der dazugehörige Fehler berechnet. Der Fehler errechnet sich mit

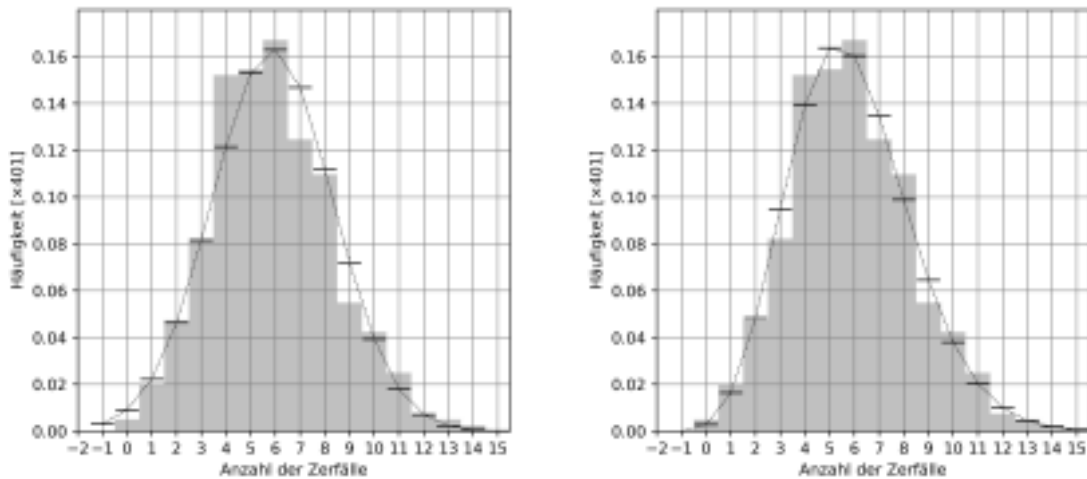
$$s_{\bar{x}} = \frac{s_{\bar{x}}}{\Delta t} \quad ,$$

da der Fehler auf Δt vernachlässigbar klein ist. Wir erhalten also mit $\Delta t = 2$ s

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\Delta t} = (16,18 \pm 0,14) \frac{1}{\text{s}} \quad .$$

4.2 Messung mit reduzierter Zählrate

Da nun die Zählrate reduziert worden ist, wird nun untersucht mit welcher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der γ -Zerfall für die neuen Bedingungen beschrieben werden kann. Hierzu wird in Abb. 3 erneut ein optischer Vergleich zwischen Poisson- und Gaussverteilung geschaffen.



(a) Histogramm der Zählraten mit Gauss-Fit

(b) Histogramm der Zählraten mit Poisson-Fit

Abbildung 3: Histogramme zur Messung mit reduzierter Zählrate

Um nun etwas empirischer zu untersuchen, welche Beschreibung passend ist, werden erneut Signifikante Größen der Stichprobe berechnet und mit den theoretischen Werten der Poissonverteilung und der Gaussverteilung verglichen. Auch hier wurden die in Abschnitt 3 gezeigten Rechenvorschriften analog verwendet.

Die aus der Stichprobe berechneten Werte betragen

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 5,88 & s_{\bar{x}} &= 0,12 \\ s_x &= 2,44 & \sqrt{\bar{x}} &= 2,42 \\ S &= 0,339 & K &= 0,025\end{aligned}$$

Die theoretischen Werte für die Gauss - bzw. Poissonverteilung (für $\mu = \bar{x}$ und $\sigma = s_x$) betragen

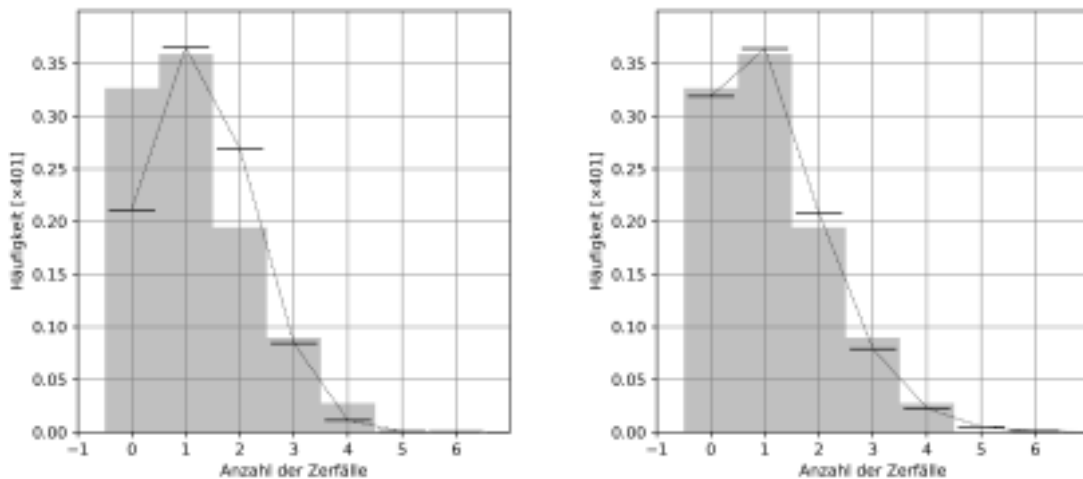
$$\begin{aligned}S_{\text{Poisson}} &= 0,412 & K_{\text{Poisson}} &= 0,170 \\ S_{\text{Gauß}} &= 0 & K_{\text{Gauß}} &= 0\end{aligned}$$

Außerdem wurde die mittlere Zählrate und der dazugehörige Fehler berechnet. Wir erhalten also mit $\Delta t = 2 \text{ s}$

$$\bar{\dot{x}} = \frac{\bar{x}}{\Delta t} = (2,94 \pm 0,06) \frac{1}{\text{s}} \quad .$$

4.3 Messung mit sehr niedriger Zählrate

Durch Abschirmung durch einen Bleiblock wurde die Zählrate nun stark reduziert. Daher wird nun erneut untersucht mit welcher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der γ -Zerfall für die neuen Bedingungen beschrieben werden kann. Analog zu den vorhergegangenen Zählraten wird in Abb. 4 erneut ein optischer Vergleich zwischen Poisson- und Gaussverteilung geschaffen.



(a) Histogramm der Zählraten mit Gauss-Fit

(b) Histogramm der Zählraten mit Poisson-Fit

Abbildung 4: Histogramme zur Messung mit sehr geringer Zählrate

Es werden, um empirisch zu untersuchen welche Beschreibung passend ist, erneut signifikante Größen der Stichprobe berechnet und mit den theoretischen Werten der Poissonverteilung und der Gaussverteilung verglichen. Abermals wurden die in Abschnitt 3 gezeigten Rechenvorschriften verwendet.

Die aus der Stichprobe berechneten Werte betragen

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1,14 & s_{\bar{x}} &= 0,05 \\ s_x &= 1,08 & \sqrt{\bar{x}} &= 1,07 \\ S &= 0,903 & K &= 0,643\end{aligned}$$

Die theoretischen Werte für die Gauss - bzw. Poissonverteilung (für $\mu = \bar{x}$ und $\sigma = s_x$) betragen

$$\begin{aligned}S_{\text{Poisson}} &= 0,936 & K_{\text{Poisson}} &= 0,876 \\ S_{\text{Gauss}} &= 0 & K_{\text{Gauss}} &= 0\end{aligned}$$

Außerdem wurde die mittlere Zählrate und der dazugehörige Fehler berechnet. Wir erhalten also mit $\Delta t = 1 \text{ s}$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\Delta t} = (1,14 \pm 0,05) \frac{1}{\text{s}} \quad .$$

5 Diskussion der Ergebnisse

5.1 Vergleich der Fits bei unterschiedlichen Zählraten

Es wurde betrachtet welche Ergebnisse Poisson- und Gauß-Fit bei unterschiedlichen Zählraten liefern. Dafür wurde sowohl eine graphische Auswertung vorgenommen als auch eine Betrachtung der Momente der Verteilungsfunktionen durchgeführt.

Messung mit mäßig hoher Zählrate

Die mittlere Zählrate lag in dieser Messung bei $(16,18 \pm 0,14) \text{ 1/s}$.

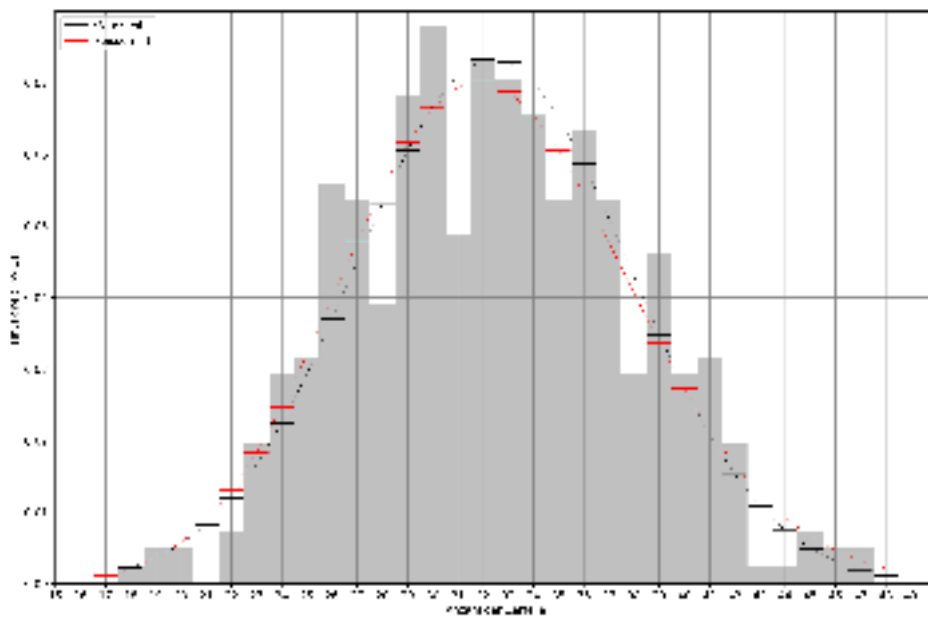


Abbildung 5: Vergleich der Fits bei hoher Zählrate

Wie man in Abb. 5 erkennen kann erscheinen sowohl Poisson, als auch Gauß-Fit bei rein graphischer Auswertung plausibel. Betrachtet man die in Abschnitt 4.1 berechneten Werte für Schiefe und Wölbung und vergleicht sie mit den theoretischen Werten der Gauß- und Poissonverteilung, so spricht die Schiefe der Verteilung der Messwerte für einen Poisson-Fit, während die Wölbung der gemessenen Verteilung weder für einen Poisson-, noch für einen Gauß-Fit spricht.

Ein Gauß-Fit ist also für eine mäßig hohe Zählrate eine akzeptable Annahme und sollte für höhere Zählraten noch bessere Ergebnisse liefern.

Messung mit reduzierter Zählrate

Die mittlere Zählrate lag in dieser Messung bei $(2,94 \pm 0,06) \text{ 1/s}$.

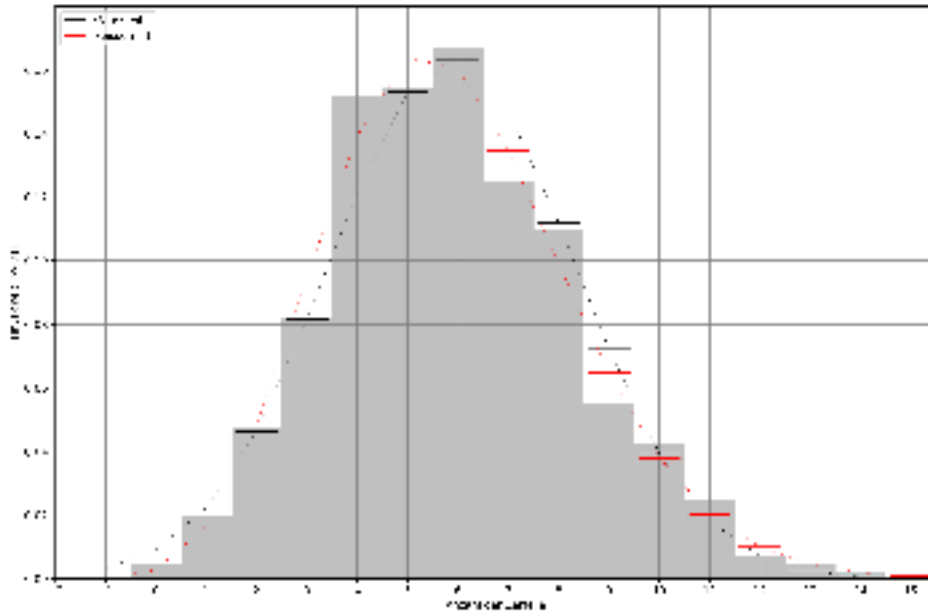


Abbildung 6: Vergleich der Fits bei reduzierter Zählrate

Den Erwartungen entsprechend liefert ein Poisson-Fit bei reduzierter Zählrate verträglichere Ergebnisse, als ein Gauß-Fit. Berechnet man den Quotienten aus theoretischem Wert des Poisson-Fits und gemessenem Wert für Schiefe und Wölbung, so erhält man ein besseres Maß für die Übereinstimmung, als bei einer rein graphischen Auswertung. Bei reduzierter Zählrate ergibt dieser Vergleich mit den Werten aus Abschnitt 4.3:

$$\frac{S_{\text{Messung}}}{S_{\text{Poisson}}} = 0.82$$

$$\frac{K_{\text{Messung}}}{K_{\text{Poisson}}} = 0.15 \quad .$$

Der Poisson-Fit liefert also gute Ergebnisse für die Schiefe der Verteilung, gibt die Wölbung aber deutlich zu groß an. Die gute Übereinstimmung von Poisson-Schiefe und gemessener Schiefe liegt daran, dass die Poissonverteilung für niedrige Zählraten zu kleinen Werten gezogen wird, während die Gauß-Verteilung symmetrisch bleibt und die Verschiebung also nicht beschreiben kann.

Messung mit sehr niedriger Zählrate

Die mittlere Zählrate lag in dieser Messung bei $(1,14 \pm 0,05) \text{ 1/s}$.

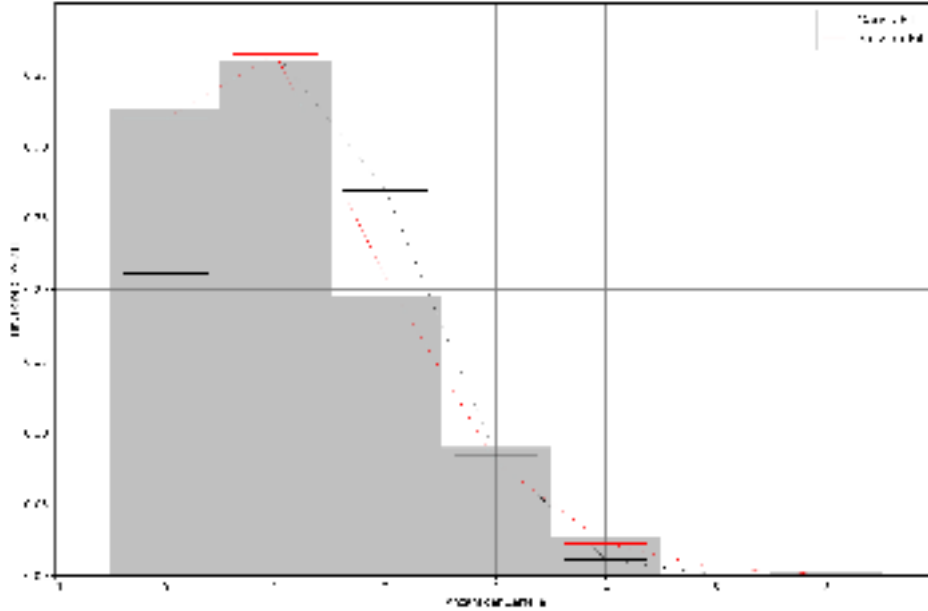


Abbildung 7: Vergleich der Fits bei sehr niedriger Zählrate

Bei der Messung mit sehr niedriger Zählrate lässt sich das Verhalten der Schiefe der Poissonverteilung bei niedrigen Raten besonders gut beobachten und bereits bei der graphischen Auswertung ist deutlich zu erkennen, dass ein Gauß-Fit keine sinnvollen Ergebnisse mehr liefert. Betrachtet man wieder die Quotienten aus gemessenen und theoretischen Werten (aus Abschnitt 4.3),

$$\frac{S_{\text{Messung}}}{S_{\text{Poisson}}} = 0.96$$

$$\frac{K_{\text{Messung}}}{K_{\text{Poisson}}} = 0.73 \quad ,$$

so erkennt man, dass bei dieser Messung sowohl Schiefe, als auch Wölbung gut durch den Poisson-Fit beschrieben werden. Ein weiteres starkes Indiz dafür, dass ein Gauß-Fit für kleine Zählraten keinen Sinn ergibt, ist dass ein Gauß-Fit negative Werte zulässt.

Fazit zur statistischen Beschreibung des γ -Zerfalls

Zusammenfassend lässt sich aus den ausgewerteten Messungen sagen, dass bei niedrigen Zählraten ein Poisson-Fit sinnvolle Ergebnisse liefert, aber eine Messung mit höheren Zählraten durch einen Gauß-Fit genähert werden kann. Trotzdem ist es zu erwarten, dass ein Poisson-Fit für mittlere Zählraten bessere Werte liefert, als ein Gauß-Fit. Unsere Messungen zu mittlerer und hoher Zählrate liefern zwar Werte für die Wölbung, welche nicht mit dem Poisson-Fit übereinstimmen, dabei handelt es sich aber um eine statistische Schwankung, um dies zu Überprüfen müsste man den Versuch aber öfter durchführen. Aus der Messung bei hohen Zählraten lässt sich aber ableiten, dass für $N \rightarrow \infty$ Gauß- und Poisson-Fit gleiche Werte liefern sollten.

5.2 Betrachtung des allgemein angenommenen Poissonfehlers $\sqrt{N}$

Tabelle 2: In der Auswertung berechnete Werte zur Betrachtung des Fehlers auf die Zählrate

	s_x	$\sqrt{\bar{x}}$	$s_x/\sqrt{\bar{x}}$
mäßig hohe Zählrate	5.44	4.69	1.16
reduzierte Zählrate	2.44	2.42	1.01
niedrige Zählrate	1.08	1.07	1.01

Vergleicht man s_x mit $\sqrt{\bar{x}}$, so erkennt man, dass für alle drei Messungen $\sqrt{\bar{x}}$ eine sehr gute Wahl für s_x darstellt. Der Poisson-Fehler, welcher für Zählraten meist gewählt wird ist also unabhängig von der Höhe der Rate eine gute Wahl.

Abbildungsverzeichnis

1	Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus	1
2	Histogramme zur Messung mit mäßig hoher Zählrate	5
3	Histogramme zur Messung mit reduzierter Zählrate	6
4	Histogramme zur Messung mit sehr geringer Zählrate	7
5	Vergleich der Fits bei hoher Zählrate	8
6	Vergleich der Fits bei reduzierter Zählrate	9
7	Vergleich der Fits bei sehr niedriger Zählrate	10

Literatur

[Quelle 1] "Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 2" Stand 02/2019.

11.3.19

Versuch 24

hohe Zählrate kein Blei, $t = 2s$, $\#2 = 411$

mittlere Zählrate · Kupfer $38,1 \text{ mm}$, $t = 2s$, $\#2 = 401$
 $\pm 0,005$

niedrige Zählrate Blei, $t = 1s$, $\#2 = 401$

Zählrohrspannung: $600V$

✓ T ~~SA~~