

Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Wintersemester 2018/19

Versuch 50: Wechselspannungen und -ströme

(durchgeführt am 22.03.2019)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
1 Ziel des Versuchs	1
2 Versuchsaufbau und Durchführung	1
2.1 Quantitative Bestimmung der Spannung bei verschiedenen Spannungsverläufen	1
2.2 Qualitative Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen	1
2.3 Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom und Spannungsmessung	2
2.3.1 Messung des kapazitiven (und induktiven) Widerstands mit einer Wechselstrombrücke	3
3 Physikalische Zusammenhänge	3
4 Auswertung und Fehleranalyse	5
4.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe	5
4.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen	7
4.3 Messung der Widerstände mit einer Wechselstrombrücke	12
5 Diskussion der Ergebnisse	13
5.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe	13
5.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen	13
5.3 Messung der Widerstände mit einer Wechselstrombrücke	16
Abbildungsverzeichnis	17
Tabellenverzeichnis	17
Literatur	17
6 Anhang	18

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wird sich mit der Modellierung von Wechselstrom auseinandergesetzt, außerdem werden die Wechselstromwiderstände, auch Impedanzen genannt, verschiedener Bauteile untersucht.

2 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Versuch lässt sich in mehrere Teile gliedern. Zunächst sollte sich mit allen verwendeten Geräten auseinandergesetzt werden. Hierzu schlossen wir den Funktionengenerator direkt an das Oszilloskop an und machten uns mit deren Funktionen vertraut.

2.1 Quantitative Bestimmung der Spannung bei verschiedenen Spannungsverläufen

In diesem Versuchsteil wurden erneut Oszilloskop und Funktionengenerator direkt aneinander angeschlossen. Zusätzlich wurde noch ein Multimeter parallel geschaltet. Nun wurde jeweils für Sinus-, Rechteck- und Dreiecksspannung, für drei unterschiedliche Frequenzen, bei der selben Eingangsspannung folgende Größen bestimmt:

Durch Ablesen am Oszilloskop wurde jeweils die Peak-to-Peak-Spannung U_{Osz} und die Periodendauer T ermittelt. Die am Funktionengenerator angezeigte Peak-to-Peak-Spannung U_{pp} und Frequenz ν wurden außerdem aufgenommen. Am Multimeter wurde nun zusätzlich die Effektivspannung U_{eff} gemessen, um zu untersuchen, wie sich diese, für verschiedene Modellierungen der Wechselspannung, verändert.

2.2 Qualitative Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen

Es sollte nun, unter Zuhilfenahme der Schaltung aus Abb. 1, qualitativ das Verhalten von Wechselstromwiderständen Z_x bei unterschiedlichen Frequenzen untersucht werden. Um den vom Oszilloskop in Channel 1 (CH1) dargestellten Spannungsverlauf über der

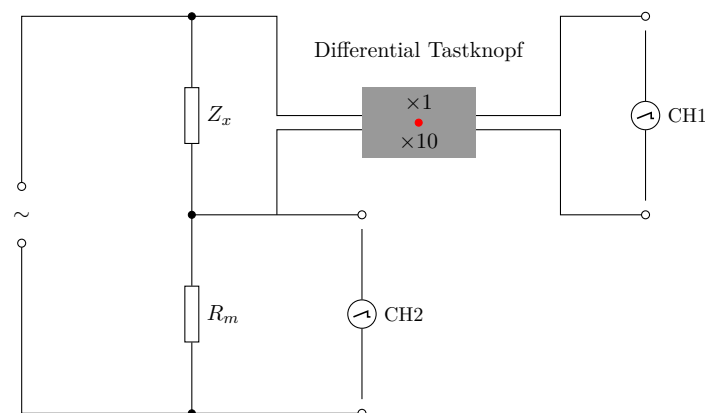


Abbildung 1: Schaltung zur Untersuchung von Wechselstromwiderständen

Impedanz Z_x in relation mit einem uns bekannten Verlauf zu setzen, wurde an Channel 2 (CH2) der Spannungsverlauf über einem ohmschen Widerstand abgenommen. Betrachtet wurde hierbei ein sinusförmiger Spannungsverlauf.

Beobachtungen für verschiedene Bauteile

Ohmscher Widerstand Wurde für Z_x ein ohmscher Widerstand eingebaut, waren die Spannungsverläufe exakt Phasengleich. Veränderte man die Frequenz so änderte sich auch lediglich die Frequenz der aufgenommenen Schwingung die beiden Spannungsamplituden blieben jedoch unverändert.

Spule Verwendete man für Z_x eine Spule so war eine klare Phasenverschiebung in den Verläufen zu sehen. Variierte man bei diesem Aufbau die Frequenz, so war zu erkennen, dass für große Frequenzen die Amplitude des über der Spule abgenommenen Spannungsverlaufs zunahm.

Kondensator Zuletzt wurde für Z_X ein Kondensator verwendet. Man sah auch hier eine Phasenverschiebung der beiden Verläufe, hierbei war sogar relativ genau zu sehen dass diese 90° betrug. Auch hier wurde die Frequenz variiert, dabei beobachteten wir, dass für größere Frequenzen die Amplitude des über dem Kondensator abgenommenen Spannungsverlaufs abnahm.

2.3 Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom und Spannungsmessung

In diesem Teil des Versuchs, sollten die Impedanzen für eine Spule, einen Kondensator und einen ohmschen Widerstand bestimmt werden. Der hierfür verwendete Aufbau ist Abb. 1 zu entnehmen.

Bei dieser Messung wurde für jedes Bauteil bei 3 verschiedenen Frequenzen folgende Größen gemessen:

Am Funktionengenerator wurde zunächst die Frequenz ν abgelesen. Am Oszilloskop wurde durch Ablesen die Peak-to-Peak-Spannung über der jeweiligen Impedanz bestimmt. Außerdem wurde die Peak-to-Peak-Spannung über dem Widerstand R_m abgelesen. Des Weiteren wurden, mit Hilfe des Oszilloskops, die Periodendauer T vermessen und der zeitliche Abstand des Nulldurchgangs der Spannungsverläufe δt ermittelt. Der Differentialtastknopf war hierbei so eingestellt, dass es zu einer Dämpfung um einen Faktor 10 kommt.

2.3.1 Messung des kapazitiven (und induktiven) Widerstands mit einer Wechselstrombrücke

In dem letzten Teil des Versuchs wurde mit Hilfe einer Wechselstrombrücke jeweils der kapazitive Widerstand eines Kondensators oder der induktive Widerstand einer Spule bestimmt. Der für den kapazitiven Widerstand genutzte Aufbau ist in Abb. 2 dargestellt. Der verstellbare Widerstand wurde hierzu in eben die Stellung gebracht, dass der Ton aus

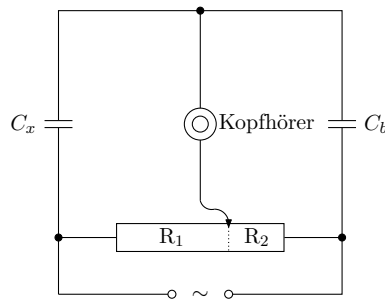


Abbildung 2: Wechselstrombrücke zur Messung von Kapazitäten

dem Kopfhörer möglichst leise wurde. Notiert wurden dann die Widerstände R_1 und R_2 . Zur Bestimmung des induktiven Widerstands wurde, da hier in realistischen Fällen die rein ohmschen Komponenten nicht vernachlässigt werden können, vor die Vergleichsspule noch ein regelbarer Vergleichswiderstand geschaltet. Nun wurden abwechselnd beide Regelwiderstände so zueinander abgestimmt, dass der Ton aus dem Kopfhörer möglichst leise wurde. Erneut wurden dann die Widerstände R_1 und R_2 notiert.

3 Physikalische Zusammenhänge

Um die in der Auswertung folgenden Berechnungen nachvollziehen zu können werden wir in diesem Abschnitt kurz die physikalischen Zusammenhänge erläutern. Der von uns genutzte Funktionengenerator erzeugt Wechselspannungen mit einstellbarer Amplitude und Frequenz, außerdem kann die Form der Funktion gewählt werden. Von uns wurden drei verschiedene Verläufe genutzt, welche in den folgenden Abbildungen dargestellt sind.



Sinunsförmiger Verlauf Links im Bild ist exemplarisch der sinusförmige Verlauf einer möglichen Wechselspannung gezeigt.



Verlauf der Dreiecksfunktion Mit Hilfe des Funktionengenerators ließ sich außerdem Wechselspannung modulieren, welche dem links exemplarisch dargestellten Dreiecksverlauf folgt.



Verlauf der Rechtecksfunktion Der dritte verwendete Verlauf, hier links dargestellt, ist der Rechtecksverlauf, welcher mit dem Funktionengenerator erzeugt wurde.

Zu beachten ist bei den oben dargestellten unterschiedlichen Spannungsfunktionen, dass diese unterschiedliche Effektivspannungen liefern. Hierbei gilt mit der Spannungsamplitude U_0 :

$$\begin{aligned} U_{\text{eff.}} &= U_0 \text{ für die Rechteckspannung,} \\ U_{\text{eff.}} &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \text{ für die Sinunsspannung,} \\ U_{\text{eff.}} &= \frac{U_0}{\sqrt{3}} \text{ für die Dreiecksspannung.} \end{aligned}$$

Eine für den Versuch relevante Gesetzmäßigkeit ist unter anderem das Ohmsche Gesetz, welches den Widerstand R die Spannung U und die Stromstärke I in den folgenden Zusammenhang bringt:

$$U = R \cdot I \quad .$$

Für periodische Wechselspannung gilt analog für die Impedanz Z :

$$U = Z \cdot I \quad .$$

Die Frequenzabhängigkeit der kapazitiven Impedanz Z_C erhalten wir für sinusförmige Spannungsverläufe

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

durch den Zusammenhang der Kapazität C mit der Spannung U und der Ladung Q

$$U = \frac{Q}{C}$$

und $I = dQ/dt$. Es folgt also für die kapazitive Impedanz

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad .$$

Man beachte jedoch, dass aus den Zusammenhängen folgt, dass der Strom der Spannung stets um 90° vorraus läuft. Analog verfährt man für induktive Impedanzen, mit dem Induktionsgesetz

$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

erhält man für Z_L

$$Z_L = i\omega L \quad .$$

Hier ist auch zu beachten, dass aus den Zusammenhängen ersichtlich wird, dass der Strom der Spannung um -90° gegenüber der Spannung verschoben ist. Beachtet man außerdem, dass die Spule auch einen, in realen Fällen nicht zu vernachlässigenden, ohmschen Widerstand hat erhält man

$$|Z_{L,R_L}| = \sqrt{(\omega L)^2 + R_L^2} \quad .$$

Aus der Dartstellung in der komplexen Ebene folgt außerdem

$$\begin{aligned} R_L &= |Z_{L,R_L}| \cos \varphi \\ \omega L &= |Z_{L,R_L}| \sin \varphi \\ \implies \tan \varphi &= \frac{R_L}{\omega L} \end{aligned}$$

4 Auswertung und Fehleranalyse

4.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe

Im ersten Teil des Versuchs wurden drei unterschiedliche Spannungsverläufe, Sinus, Kasten und Dreieck betrachtet. Dazu wurde für drei unterschiedliche Frequenzen die Peak-to-Peak Spannung aus den, auf dem Oszilloskop abgelesenen Werten berechnet. Alle abgelesenen und berechneten Werte, sowie die, nicht explizit in der Auswertung berechneten Fehler, sind in Tabelle 17 nachzulesen, hier in der Auswertung werden zum Erhalt der Übersichtlichkeit nur wichtigen Zwischen- und Endergebnisse angegeben.

Für die Peak-to-Peak Spannung wurde unabhängig von der Form des Spannungsverlaufs und der Frequenz immer ein Wert von $U_{oszi} = (5,20 \pm 0,13) \text{ V}$ abgelesen. Der Fehler auf diese Spannung wurde mit

$$s_{U_{oszi}} = \sqrt{\left(\frac{0,3 \cdot 5,2 \text{ V}}{\sqrt{3}}\right)^2 + (0,1 \cdot 1 \text{ V})^2}$$

berechnet. Dieser Fehler setzt sich aus der Geräteangabe für systematische Unsicherheiten im gewählten Messbereich, in diesem Fall eine Unsicherheit von 3 % auf den gemessenen Wert und dem digit-Fehler bezogen auf den Messbereich zusammen. Beim systematischen Fehler von angegebenen drei Prozent ist noch zu beachten, dass durch $\sqrt{3}$ geteilt wird, um den systematischen Fehler nach einer Normalverteilung zu verteilen. Der digit-Fehler bleibt bei den meisten Geräten auch in unterschiedlichen Messbereichen gleich, es ist aber zu bedenken, dass dieser durch die Gewichtung mit dem Messbereich trotzdem unterschiedliche Werte annimmt.

Die jeweiligen Effektivspannungen werden nun für jeden Spannungsverlauf einzeln berechnet. Man nutzt dafür die Regeln für die Berechnung von Effektivspannungen bei einem symmetrischen Verlauf:

$$\begin{aligned} \text{Sinus: } U_{\text{eff,S}} &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} = (1,83 \pm 0,04) \text{ V} \\ \text{Kasten: } U_{\text{eff,K}} &= U_0 = (2,600 \pm 0,065) \text{ V} \\ \text{Dreieck: } U_{\text{eff,D}} &= \frac{U_0}{\sqrt{3}} = (1,50 \pm 0,04) \text{ V} \end{aligned}$$

Hier wurde nun für U_0 jeweils die Hälfte der Peak-to-Peak Spannung eingesetzt und der Fehler ergibt sich analog zum Wert mit dem halben Fehler und gewichtet entsprechend dem jeweiligen Spannungsverlauf.

Tabelle 1: Multimeter

	$\nu_{\text{Generator}}$ [kHz]	U_{Multi} [V]
Sinus	2	1.3
	0.5	1.4
	10	0.8
Kasten	2	1
	0.5	2.5
	10	1.5
Dreieck	2	1
	0.5	1.2
	10	0.6

Als zweite Möglichkeit zur Spannungsbestimmung wurde ein Digitalmultimeter genutzt. Das Digitalmultimeter zeigte, abhängig vom Spannungsverlauf und der Frequenz unterschiedliche Werte an. Der Fehler auf die Multimeterspannungen wurde für jede einzeln mit, in Prozent angegebenen systematischen Fehler und einem Ablesefehler in digits berechnet. Die Rechnung unterscheidet sich kaum von der Vorherigen für den Fehler auf die Oszillatorspannung, nur das in

diesem Falle keine Messbereiche gewichtet werden müssen. Der Fehler auf die Multimeter-Spannung beträgt, trotz einzelner Berechnung bei allen Werten nach sinnvoller Rundung $sU_{\text{Multi}} = 0,20 \text{ V}$.

Vergleicht man die mit dem Multimeter gemessenen Werte mit den Effektivspannungen, die aus den abgelesenen Werten berechnet wurden, so sieht man, dass die Werte stark abweichen. Lediglich eine niedrige Frequenz von 500 Hz produziert annähernd gleiche Werte.

Neben der Peak-to-Peak Spannung wurde auch die Periodendauer am Oszilloskop abgelesen. Aus der Periodendauer kann man mit $\nu = 1/T$ die Frequenz (Siehe Tabelle 2) berechnen und diese mit der Generatorfrequenzen vergleichen.

Tabelle 2: Vergleich der Frequenzen

$\nu_{\text{Generator}} [\text{kHz}]$	$s_{\nu, \text{Gem.}} [\text{kHz}]$	$\nu_{\text{gemessen}} [\text{kHz}]$	$s_{\nu, \text{gem.}} [\text{kHz}]$
2.006	0.001	2	0.00011
0.5	$1 \cdot 10^{-8}$	0.5	$1 \cdot 10^{-5}$
10.03	0.01	10	0.003

Hier wurde für den Fehler auf die abgelesene Frequenz

$$s_{\nu_{\text{Generator}}} = \sqrt{\frac{(0.01 \cdot \nu_{\text{Generator}})^2}{3} + (0,001 \text{ kHz})^2}$$

genutzt. Also wieder eine Kombination aus angegebenem dem systematischen und dem statistischen Fehler. Die berechnete Frequenz erhielt ihren Fehler über den Fehler auf die gemessene Periodendauer mit

$$s_{\nu_{\text{gemessen}}} = \frac{s_T}{T^2}$$

wobei die jeweiligen Periodendauern mit ihren Fehlern genutzt wurden.

4.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen

Im zweiten Teil des Versuchs wurde der Wechselstromwiderstand für einen ohmschen Widerstand, einen Kondensator und eine Spule bestimmt. Das Vorgehen war bei allen drei Widerständen gleich, die Auswertung unterscheidet sich jedoch in Teilen, da Spule und Kondensator im Wechselstrom anders reagieren als ein einfacher Widerstand.

Die genutzten Messwerte, berechnete Werte und Fehler sind in Tabelle 14, Tabelle 15 und Tabelle 16 im Anhang angegeben. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei den angegebenen Spannungen immer um die Peak-to-Peak Werte handelt, somit ist auch der Strom ein Peak-to-Peak Wert. Des Weiteren wurden die Spannungen U_R , U_C und U_L mit zehn multipliziert, da der genutzte Tastknopf die Ergebnisse um den Faktor zehn gedämpft ausgegeben hat. Bei Fehlern auf die oben genannten Spannung wurde der Fehler auf die gedämpften Werte berechnet und dieser dann wieder mit zehn multipliziert. Der Fehler von angegebenen 3% auf den Tastknopf wurde nicht genutzt, da er einen verschwindend geringen Beitrag liefert, da der Ablesefehler relativ hoch geschätzt wurde.

Widerstand

Die Bestimmung des Widerstands gelingt am leichtesten, da dieser im Wechselstrom weiterhin der bekannten Beziehung $U = RI$ folgt.

Zunächst wurde aus der Peak-to-Peak Spannung U_m der Strom I_R mit $I_R = U_m/R_m$ berechnet, wobei der bekannte Vergleichswiderstand $R_m = 9,999 \Omega$ genutzt wurde. Dies wurde für alle drei gemessenen Frequenzen einzeln durchgeführt und der Fehler auf den Strom berechnet sich mit

$$s_{I_R} = \frac{s_{U_{Rm}}}{R_m}$$

$$\text{mit } s_{U_{Rm}} = \sqrt{\frac{(0.03 \cdot U_{Rm})^2}{3} + (0.1 \cdot \text{Empfindlichkeit})^2}$$

Für den Strom wurde also einfache Gaußsche Fehlerfortpflanzung genutzt und der Fehler auf die Spannung wurde aus Kombination des systematischen Fehlers und des statistische Fehlers bestimmt. Kennt man nun den Strom, so kann man mit der zweiten Spannung U_{Rx} die Impedanz und damit im Fall eines einfachen Widerstands gleich den unbekannten Widerstand bestimmen. Für alle drei Frequenzen wird

$$|Z_R| = R_x = \frac{U_{Rx}}{I_R} \quad (1)$$

$$\text{mit } s_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{s_{U_x}}{I_R}\right)^2 + \left(\frac{s_{I_R} \cdot U_{Rx}}{I_R^2}\right)} \quad (2)$$

bestimmt. Der Fehler auf die Spannung U_{Rx} wurde dabei analog zur Berechnung von $s_{U_{Rm}}$ durchgeführt.

Tabelle 3: Berechnete Widerstände

Frequenz [Hz]	$R_x [\Omega]$
1106.0	152 ± 4
3079.0	152 ± 4
10190.0	152 ± 4

Berechnet man den Mittelwert der Widerstände zu den einzelnen Frequenzen, so erhält man $R_{x,\text{Mittel}} = (152,0 \pm 2,3) \Omega$.

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom lag bei allen drei Frequenzen bei Null.

Kondensator

Die Bestimmung der Kapazität eines Kondensators folgt fast analog zur Bestimmung des Widerstands, die Impedanz ist nur mit der Winkelgeschwindigkeit zu verrechnen.

Zunächst wurde, analog zum Vorgehen beim Widerstand die Gesamtimpedanz $|Z_C|$ bestimmt. Es wurde also mit dem bekannten Widerstand R_m der Strom I_C bestimmt, um dann die Impedanz mit $|Z_C| = U_C/I_C$ zu erhalten. Die Fehler ergeben sich ebenfalls analog, der Fehler auf die Impedanz ist der vorherige Fehler auf den Widerstand, also

$$s_{Z_C} = \sqrt{\left(\frac{s_{U_C}}{I_C}\right)^2 + \left(\frac{s_{I_C} \cdot U_C}{I_C^2}\right)} \quad .$$

Aus der Impedanz lässt sich mit $C = 1/\omega|Z_C|$ die Kapazität berechnen, wenn man die Winkelgeschwindigkeit kennt. Die Winkelgeschwindigkeit wurde auch der, am Generator abgelesenen, Frequenz mit

$$\omega_C = 2\pi\nu_C$$

berechnet. Der Fehler auf die Winkelgeschwindigkeit ist verschwindend gering, da nur ein Rundungsfehler der Anzeige angenommen werden kann. Dieser Fehler wird also in der weiteren Auswertung vernachlässigt. Die einzeln berechneten Kapazitäten sind in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Berechnete Kapazitäten

Frequenz [Hz]	Z_C [V/A]	C [nF]
1106.0	1130 ± 43	127 ± 5
3079.0	406 ± 14	127 ± 4
10190.0	126 ± 4	124 ± 4

Der Fehler auf die Kapazität berechnet sich somit mit

$$s_C = \left| \frac{s_{Z_C}}{2\pi\nu_C \cdot Z_C^2} \right| \quad .$$

Der Mittelwert der so bestimmten Kapazitäten beträgt $C_{\text{Mittel}} = (126 \pm 3) \text{ nF}$.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wurde aus dem abgelesenen δt bestimmt. Die Beziehung

$$\varphi_C = \frac{\delta_{t_C} \cdot 360^\circ}{T_C}$$

liefert das Ergebnis. Sowohl δ_t , als auch T_C wurden aus abgelesenen digits in Kombination mit ihrem Messbereich bestimmt. Der Fehler wurde in beiden Fällen mit

$$s_{\text{Zeit}} = \sqrt{\frac{(0.03 \cdot \text{Zeit})^2}{3} + (0.1 \cdot \text{Messbereich})^2}$$

bestimmt. Somit ergeben sich für die jeweils ermittelten Phasenverschiebungen die Werte aus Tabelle 5 mit dem darunterstehenden Fehler. Das Vorzeichen macht deutlich, dass in diesem Fall die Spannung dem Strom um φ_C verschoben nachläuft.

Tabelle 5: Phasendifferenz beim Kondensator

Frequenz [Hz]	φ_C [°]
1106.0	-90 ± 11
3079.0	-169 ± 13
Auswertung 10190.0	-90 ± 10

$$s_{\varphi_C} = \sqrt{\left(\frac{s_{\text{delta}} \cdot 360^\circ}{T_C}\right)^2 + \left(\frac{s_T \cdot \delta_{tC} \cdot 360^\circ}{T_C^2}\right)^2}.$$

Spule

Die ersten Schritte bei der Bestimmung der Induktivität einer Spule folgen vollständig dem Rechenweg zur Bestimmung der Kapazität eines Kondensators. Mit Hilfe des Widerstands R_m wird der Strom I_L bestimmt und damit dann die Impedanz $|Z_L| = U_L/I_L$.

Des Weiteren kommt es auch bei einer Spule zu einer Phasenverschiebung φ_L von Strom und Spannung. Auch diese wurde analog zum Vorgehen beim Kondensator, also mit abgelesenem δ_t und abgelesener Periodendauer T_L , bestimmt. Für die Phasenverschiebung haben sich folgende (Tabelle 6) Werte ergeben:

Tabelle 6: Phasendifferenz bei einer Spule

Frequenz [Hz]	φ_C [°]
1106.0	20.6 ± 0.7
3079.0	90 ± 3
10190.0	72.0 ± 2.2

Nutzt man nun die in den Grundlagen beschriebenen Zusammenhänge von Induktivität, Widerstand und Impedanz einer Spule und stellt diese um, so kann man mit

$$L = \frac{Z_L}{\sqrt{\omega_L^2 + \left(\frac{\omega_L}{\tan \varphi_L}\right)^2}}$$

aus bekannten Größen die Induktivität L der Spule bestimmen. Der Fehler auf die Induktivität wird mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt, wobei hier wieder die auf dem Frequenzgenerator angegebene Frequenz genutzt wurde, um die Winkelgeschwindigkeit zu

bestimmen und diese daher einen nicht-beitragenden Fehler hat. Für den Fehler ergibt sich also

$$s_L = \sqrt{\left(\frac{s_Z}{\omega_L \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan \varphi_L}\right)^2}}\right)^2 + \left(\frac{Z_L \cdot s_\varphi}{\omega_L \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_L}}}\right)^2}.$$

Mit den bestimmten Impedanzen, Winkelgeschwindigkeiten und Phasendifferenzen ergeben sich die in Tabelle 7 dargestellten Werte für die Induktivität der genutzten Spule.

Tabelle 7: Berechnete Induktivitäten

Frequenz [Hz]	Z_L [V/A]	L [μ H]
1106.0	18 ± 3	919 ± 155
3079.0	23 ± 3	1186 ± 156
10190.0	64 ± 10	953 ± 143

Der Mittelwert dieser Werte liegt bei $L_{\text{Mittel}} = (1019 \pm 87) \mu\text{H}$.

Ebenfalls aus dem Zusammenhang von Impedanz, Widerstand und Induktivität lässt sich nun mit den Werten der Induktivität ein Widerstand der Spule im Wechselstromkreis bestimmen. Dafür nutzt man

$$R_L = \sqrt{Z_L^2 - (\omega_L \cdot L)^2}$$

$$\text{mit } s_{R_L} = \sqrt{\left(\frac{s_{Z_L} \cdot 2Z_L}{\sqrt{Z_L^2 - (\omega_L \cdot L)^2}}\right)^2 + \left(\frac{s_L \cdot 2\omega_L^2 L}{\sqrt{Z_L^2 - (\omega_L \cdot L)^2}}\right)^2}.$$

Es ergeben sich folgende Wechselstromwiderstände der Spule (Tabelle 8)

Tabelle 8: Berechnete Widerstände der Spule

Frequenz [Hz]	R_L [Ω]
1106.0	17 ± 7
3079.0	$0 \pm -$
10190.0	20 ± 84

Um einen Vergleichswert zu erhalten wurde der ohmsche Widerstand der Spule auch mit dem Digitalmultimeter gemessen. Der Fehler auf den so gemessenen Wert wurde über die angegebenen Gerätefehler mit

$$s_{R,\text{DMM}} = \sqrt{\frac{(0.008 \cdot R_{\text{DMM}})^2}{3}} + 0.3^2$$

berechnet. Damit ergibt sich $R_{L,\text{DMM}} = (16,8 \pm 0,3) \Omega$.

Graphische Auftragung von Impedanz und Phasenverschiebung

Um eine visuelle Auswertung vornehmen zu können wurden die Impedanzen von Widerstand, Spule und Kondensator gegen die zugehörigen Frequenzen doppellogarithmisch aufgetragen.

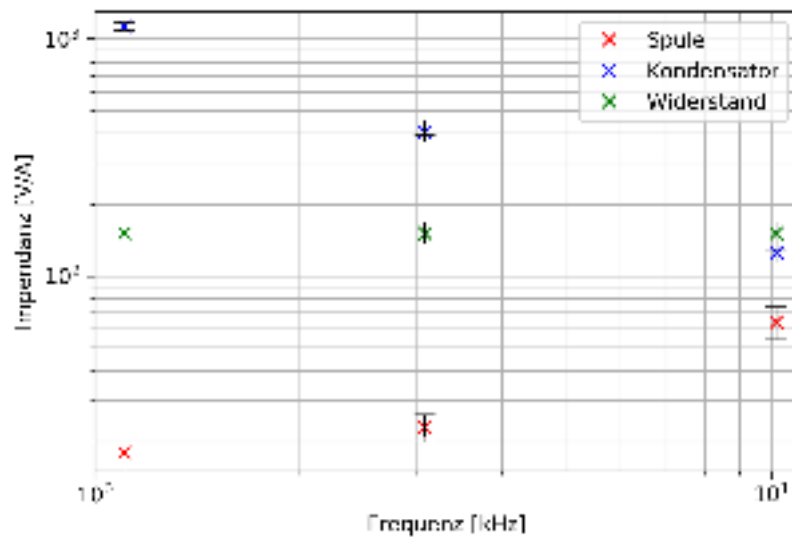


Abbildung 3: Graphische Auftragung der Impedanzen

Außerdem wurde noch die Phasendifferenz der unterschiedlichen Bauteile gegen die Frequenz aufgetragen, dies aber nur halblogarithmisch in der Frequenz.

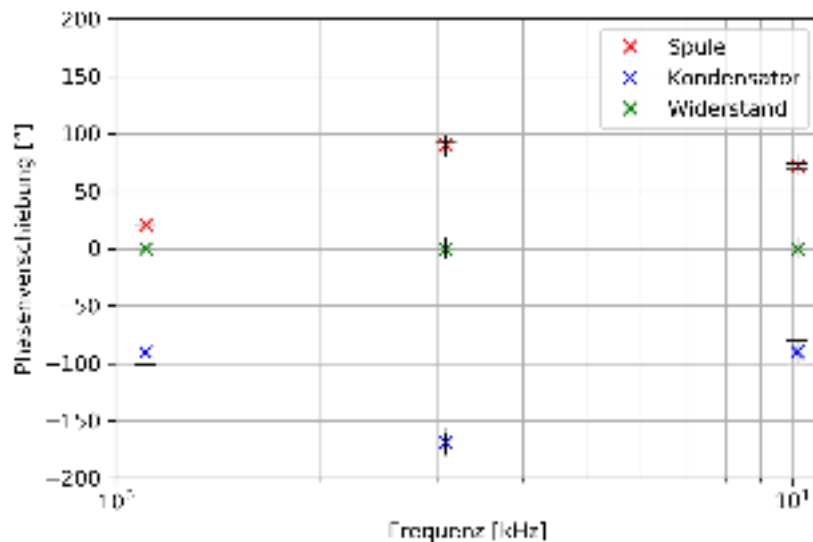


Abbildung 4: Graphische Auftragung der Phasendifferenz

4.3 Messung der Widerstände mit einer Wechselstrombrücke

Im letzten Teil des Versuchs wurden die Kapazität des Kondensator und die Induktivität der Spule mit Hilfe einer Wechselstrombrücke bestimmt.

Kondensator

Um die Kapazität des Kondensators zu bestimmen wurden zwei Verhältnisse von l_1 und l_2 ermittelt. Mit diesen Verhältnissen kann man dann mit Hilfe des eingebauten, bekannten Referenzkondensators die Kapazität des unbekannten Kondensators bestimmen. Man nutzt dafür

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{C_b}{C_x} \\ \Rightarrow C_x = \frac{C_b}{l_1/l_2} .$$

Da bei unserer Messung mit umgedrehter Schaltung das selbe Ergebnis, wie bei der ersten Messung herauskam, liefert der Mittelwert an dieser Stelle keine neuen Ergebnisse, sondern nur einen kleineren Fehler. Das von uns gemessene Verhältnis war $l_1/l_2 = 2.6/7.4$, was, bei einer Referenzkapazität von $C_b = 104 \text{ nF}$, zu

$$C_x = (132,4 \pm 0,3) \text{ nF}$$

führt.

Der Fehler auf die Kapazität berechnet sich mit $s_{l_1} = s_{l_2} = s_l = 7 \cdot 10^{-3}$ als Fehler auf den Mittelwert zu

$$s_{C_x} = \sqrt{\left(\frac{s_l \cdot C_b}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{s_l \cdot l_2 \cdot C_b}{l_1^2}\right)^2} .$$

Spule

Bei der Messung der Spule wurde ebenfalls das Verhältnis von l_1 und l_2 bestimmt. Das umgesteckte Verhältnis lieferte in diesem Fall ebenso das selbe Ergebnis wie die erste Messung. Die Induktivität der Spule berechnet man dann mit

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{L_x}{L_b} \\ \Rightarrow L_x = \frac{l_1}{l_2} L_b .$$

Diese Messmethode ergab für die Induktivität der Spule

$$L_x = (1349 \pm 4) \mu\text{H} ,$$

wobei der Fehler mit

$$s_{L_x} = \sqrt{\left(\frac{L_b \cdot s_l}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{s_l \cdot l_1 \cdot L_b}{l_2^2}\right)^2}$$

berechnet wurde.

5 Diskussion der Ergebnisse

5.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe

Mit Hilfe eines Oszilloskops und eines Multimeters wurden Effektivspannungen von verschiedenen Spannungsverläufen bestimmt. Dies wurde bei drei unterschiedlichen Frequenzen durchgeführt. Bei der Messung mit dem Oszilloskop erhielten wir die Werte

$$\begin{aligned}\text{Sinus: } U_{\text{eff,S}} &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} = (1,83 \pm 0,04) \text{ V} \\ \text{Kasten: } U_{\text{eff,K}} &= U_0 = (2,600 \pm 0,065) \text{ V} \\ \text{Dreieck: } U_{\text{eff,D}} &= \frac{U_0}{\sqrt{3}} = (1,50 \pm 0,04) \text{ V} \quad .\end{aligned}$$

Die berechneten Werte U_{eff} waren für jeden einzelnen Spannungsverlauf für alle drei gemessenen Frequenzen gleich. Das ist nicht weiter überraschend, da die am Funktionengenerator eingestellte Peak-to-Peak-Spannung bei allen drei Frequenzen die selbe war. Die Multimetermessung hingegen, war wie in Abschnitt 4.1 zu sehen ist, frequenzabhängig. Das ist vermutlich auf die Bauart des Multimeters zurückzuführen. Man bemerkt jedoch, dass **im Mittel** die aus der Theorie hervorgehende Ordnungsrelation

$$U_{\text{eff,K}} > U_{\text{eff,S}} > U_{\text{eff,D}}$$

gilt. Außerdem sieht man, dass die, mit dem Multimeter gemessenen, Werte für größere Frequenzen bei allen Spannungsverläufen abnehmen. Diese Regelmäßigkeit in der Ungenauigkeit der Messmethode legt noch einmal stärker nahe, dass es sich hierbei um einen, durch die Bauart des Multimeters bedingten, Fehler handeln sollte. Es ist zusätzlich festzustellen, dass die, durch das Multimeter gemessenen Werte alle unter den mit dem Oszilloskop gemessenen Werten liegen, was auch ein Indiz für eine relativ große Eichtoleranz sein könnte.

Mit Hilfe des Oszilloskops wurde außerdem die Frequenz ν bestimmt. Vergleicht man die Werte aus Tabelle 2, so kann man sehen, dass die prozentuale Abweichung, des durch das Oszilloskop bestimmten Wertes, zum am Funktionengenerator eingestellten Wert höchstens 0.3 % beträgt, was dafür spricht, dass die Bestimmung durch Ablesen vom Oszilloskop nur einem geringen Fehler unterliegt und somit eine geeignete Messmethode darstellt.

5.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen

Mit Hilfe eines Oszilloskops, eines Widerstandes und eines Differential-Tastkopfes sollten die Wechselstromwiderstände eines ohmschen Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators bestimmt werden.

Widerstand Für den Widerstand ergibt sich im Mittel aus den Werten aus Tabelle 3 ein Wechselstromwiderstand von

$$R_x = (152,0 \pm 2,3) \Omega \quad .$$

An dieser Stelle darf der Mittelwert gebildet werden, da der ohmsche Widerstand im Wechselstrom frequenzunabhängig ist.

Auf dem verwendeten Bauteil war ein Widerstand von $R = 150 \Omega$ angegeben. Der angegebene Wert liegt also in einer 1σ -Umgebung von dem gemessenen Wert, was für eine geeignete Messmethode spricht. Die mit dem Oszilloskop gemessene Phasenverschiebung war bei allen Frequenzen gleich Null, was der theoretischen Vorhersage entspricht.

Kondensator Für den Kondensator erhielten wir für die frequenzabhängige Impedanz und für die (nicht-frequenzabhängige) Kapazität die Werte aus der Tabelle 9. Es fällt

Tabelle 9: Ergebnisse für den Kondensator

Frequenz [Hz]	Z_C [V/A]	C [nF]
1106.0	1130 ± 43	127 ± 5
3079.0	406 ± 14	127 ± 4
10190.0	126 ± 4	124 ± 4

direkt auf, dass die Impedanz für größere Frequenzen kleiner wird, was der theoretischen Vorhersage entspricht, da im Falle eines Kondensators die Impedanz antiproportional zur Frequenz ist. Man erhält für die Kapazität des Kondensators den Mittelwert

$$C = (126 \pm 3) \text{ nF}$$

Diesen Wert werden wir im folgenden Abschnitt mit dem durch die Wechselstrombrücke bestimmten Wert vergleichen.

Die ermittelten Phasendifferenzen sind in Tabelle 10 dargestellt.

Tabelle 10: Phasendifferenzen für den Kondensator

Frequenz [Hz]	φ_C [°]
1106.0	-90 ± 11
3079.0	-169 ± 13
10190.0	-90 ± 10

Die vorhergesagte Phasendifferenz von -90° wird durch zwei der drei Werte sehr gut bestätigt und es ist kein frequenzabhängiger Trend zu erkennen, was ebenfalls den theoretischen Grundlagen entspricht. Die starke Abweichung des zweiten Werts ist nicht im Rahmen üblicher Messfehler und damit vermutlich auf einen schweren Ablesefehler zurückzuführen. Betrachtet man nur die beiden übrigen Werte, so passen diese sehr gut zu den Erwartungen. Natürlich verliert die Messung so an Aussagekraft, beachtet man jedoch, dass die beiden, der Theorie entsprechenden Werte die beiden sind, welche bei der maximalen und der minimalen Frequenz aufgenommen wurden, so kann man vielleicht darüber hinwegsehen.

Spule Für die Spule erhielten wir für die Phasendifferenzen die Werte aus Tabelle 11. Die Theorie sagt voraus, dass die Phasendifferenz mit steigender Frequenz zunimmt, da

Tabelle 11: Phasendifferenz bei einer Spule

Frequenz [Hz]	φ_C [°]
1106.0	20.6 ± 0.7
3079.0	90 ± 3
10190.0	72.0 ± 2.2

der $\arctan(x)$ eine monoton steigende Funktion ist. Dies lässt sich zumindest durch den Vergleich des ersten Messpunkts mit den beiden anderen bestätigen. Hier könnte jedoch auch ein Ablesefehler vorliegen.

Für die Induktivität und die Impedanzen erhielten wir die Werte aus Tabelle 12.

Tabelle 12: Berechnete Induktivitäten

Frequenz [Hz]	Z_L [V/A]	L [μ H]
1106.0	18 ± 3	919 ± 155
3079.0	23 ± 3	1186 ± 156
10190.0	64 ± 10	953 ± 143

Der Verlauf der Induktivitäten entspricht der Vorhersage, da die Impedanz der Spule direkt proportional zur Frequenz ist und somit für steigende Frequenzen größer werden sollte. Im Mittel erhielten wir für die Induktivität der Spule

$$L = (1019 \pm 87) \mu\text{H} \quad .$$

Auf dem Bauteil war eine Induktivität von $L = 942 \mu\text{H}$ angegeben. Wir sehen also, dass der angegebene Wert in einer 1σ -Umgebung um den gemessenen Wert liegt. Dieser Umstand lässt die Vermutung zu, dass der große relative Fehler von 8,5 % nicht etwa durch eine zu hohe Abschätzung der Fehler entsteht, sondern auf einer doch nicht besonders genauen Messmethode beruht.

Es wurde über die Messung mit dem Oszilloskop außerdem noch der rein ohmsche Widerstand der Spule berechnet. Die so ermittelten Werte sind in Tabelle 13 dargestellt.

Tabelle 13: Berechnete Widerstände der Spule

Frequenz [Hz]	R_L [Ω]
1106.0	17 ± 7
3079.0	$0 \pm -$
10190.0	20 ± 84

Um die Qualität dieser Messung abzuschätzen kann man die Werte mit dem, durch das Multimeter bestimmten Widerstand vergleichen. Dieser betrug $R = (16,8 \pm 0,3) \Omega$. Der, bei der geringsten Frequenz bestimmte Widerstand liegt dem am nächsten, betrachtet man jedoch dessen relativen Fehler von 41,2 % so lässt sich die Aussagekraft dieses Ergebnisses anzweifeln. Die berechneten Widerstände liegen jedoch trotzdem in der richtigen Größenordnung, was zumindest für die Qualität der vorher bestimmten Größen spricht, da diese kleineren Fehlern unterlagen.

Grafische Darstellung von $Z(\nu)$ und $\varphi(\nu)$ In Abb. 3 ist deutlich der erwartete Verlauf der Impedanzen zu sehen. Während die Impedanz des ohmschen Widerstands konstant auf einem Wert bleibt, weist die kapazitive Impedanz eine negative und die induktive Impedanz eine positive Steigung auf.

In Abb. 4 ist die Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der Frequenz für die drei Bauteile aufgetragen. Der Verlauf für den Widerstand entspricht der Erwartung, es ist klar zu erkennen, dass die Phasenverschiebung unabhängig von der Frequenz null bleibt. Die Verläufe der anderen beiden Bauteile entsprechen, wie oben bereits diskutiert wurde, nicht unbedingt der theoretischen Vorhersage.

5.3 Messung der Widerstände mit einer Wechselstrombrücke

In diesem Teil des Versuchs wurden die Kapazität eines Kondensators und die Induktivität einer Spule mit Hilfe einer Wechselstrombrückenschaltung bestimmt. Für die Kapazität erhielten wir den Wert

$$C_x = (132,4 \pm 0,3) \text{ nF} \quad .$$

Vergleicht man diesen mit dem durch die vorhergegangene Methode bestimmten Wert $C = (126 \pm 3) \text{ nF}$ so liegen dieser in der selben Größenordnung, wobei zu beachten ist, dass das Messverfahren mit der Wechselstrombrücke auf Grund der subjektiven Wahrnehmung des Tons möglicherweise unterschätzten Fehlern unterliegt.

Für die Induktivität erhielten wir den Wert

$$L_x = (1349 \pm 4) \mu\text{H} \quad .$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem, durch die vorhergegangene Methode bestimmten, Wert von $L = (1019 \pm 87) \mu\text{H}$, stellt man eine signifikante Abweichung fest, sie liegen jedoch in der selben Größenordnung. Hier ist in besonderem Maße zu berücksichtigen, dass die Benutzung der Wechselstrombrücke nicht gerade als Präzisionsverfahren beschrieben werden kann. Man muss hierbei beide Drehwiderstände einstellen, was ,da man sich die Lautstärke von Tönen nicht besonders gut merken kann, definitiv einem größeren Fehler unterliegt als der der angegeben wurde, da sich dieser Fehler gar nicht oder nur schwierig kalkulieren lässt.

Es lässt sich jedoch zusammenfassend sagen, dass die beiden Messmethoden ähnliche Werte liefern, was zumindest nahe legt, dass man nicht stark von dem wahren Wert entfernt liegt.

Abbildungsverzeichnis

1	Schaltung zur Untersuchung von Wechselstromwiderständen	1
2	Wechselstrombrücke zur Messung von Kapazitäten	3
3	Graphische Auftragung der Impedanzen	11
4	Graphische Auftragung der Phasendifferenz	11

Tabellenverzeichnis

1	Multimeter	5
2	Vergleich der Frequenzen	6
3	Berechnete Widerstände	7
4	Berechnete Kapazitäten	8
5	Phasendifferenz beim Kondensator	9
6	Phasendifferenz bei einer Spule	9
7	Berechnete Induktivitäten	10
8	Berechnete Widerstände der Spule	10

Literatur

[Quelle 1] *"Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 2"* Stand 02/2019.

6 Anhang

Messwerte, berechnete Werte und Fehler Teil B

Tabelle 14: Messwerte und daraus bestimmte Werte und Fehler zur Bestimmung des unbekannten Widerstands R_x

ν [kHz]	U_{Rx} [V]	s_U	U_{Rm} [V]	$s_{U_{Rm}}$ [V]	T [μ s]	s_T [μ s]	I [A]	s_I [A]
1106.0	3.8	0.01	0.25	0.007	0.0009	2.9e-05	0.025	0.0007
3079.0	3.8	0.01	0.25	0.007	0.000165	6e-06	0.025	0.0007
10190.0	3.8	0.01	0.25	0.007	0.0001	3e-06	0.025	0.0007

Tabelle 15: Messwerte und berechnete Werte Kondensator

ν [Hz]	U_C [V]	s_{U_C} [V]	U_{Cm} [V]	$s_{U_{Cm}}$ [V]	T_C [s]	s_{T_C} [s]	I_C [A]	s_{I_C} [A]
1106.0	5.2	0.135	0.046	0.001	0.0009	2.9e-05	0.005	0.0001
3079.0	5.2	0.135	0.128	0.003	0.00016	6e-06	0.013	0.0003
10190.0	4.8	0.13	0.38	0.008	0.0001	3e-06	0.038	0.0008

Tabelle 16: Messwerte und berechnete Werte Spule

ν [Hz]	U_S [V]	s_{U_S} [V]	U_{Sm} [V]	$s_{U_{Sm}}$ [V]	T_S [s]	s_{T_S} [s]	I_S [A]	s_{I_S} [A]
1106.0	1.2	0.201	0.66	0.015	0.0009	2.9e-05	0.07	0.0015
3079.0	1.56	0.202	0.68	0.015	0.0002	6e-06	0.07	0.0015
10190.0	3.4	0.503	0.53	0.014	0.0001	3e-06	0.05	0.0014

Messwerte, berechnete Werte und Fehler zu Teil A2

Tabelle 17: Messwerte und daraus berechnete Werte zu Versuchsteil A

	U_{pp} [V]	ν [kHz]	s_ν [kHz]	U_{oszi} [V]	U_{eff} [V]	T [μ s]	s_T [μ s]	ν_{gem} [kHz]	$s_{\nu_{gem}}$ [kHz]	U_{multi} [V]	$s_{U_{multi}}$
Sinus	5.6	2.006	0.001	5.2	1.84	500	26.0	2	0.00011	1.3	0.2
	5.6	0.5	1e-08	5.2	1.84	2000	43.0	0.5	1e-05	1.4	0.2
	5.6	10.03	0.01	5.2	1.84	100	25.0	10	0.00251	0.8	0.2
Kasten	5.6	2.006	0.001	5.2	2.6	500	51.0	2	0.0002	1	0.2
	5.6	0.5	1e-08	5.2	2.6	2000	61.0	0.5	2e-05	2.5	0.2
	5.6	10.03	0.01	5.2	2.6	100	50.0	10	0.005	1.5	0.2
Sägezahn	5.6	2.006	0.001	5.2	1.5	500	9.0	2	4e-05	1	0.2
	5.6	0.5	1e-08	5.2	1.5	2000	35.0	0.5	1e-05	1.2	0.2
	5.6	10.03	0.01	5.2	1.5	100	3.0	10	0.0003	0.6	0.2